Chapitre 1

Notions de base

Ce chapitre a pour but de rappeler les notions algébriques élémentaires utilisées dans le deuxième et troisième chapitre.

1.1 Espaces vectoriels

Sous leur forme la plus simple les espaces vectoriels représentent intuitivement les déplacements dans les espaces géométriques élémentaires comme la droite, le plan ou notre espace physique. Les bases de cette théorie remplacent maintenant la représentation construite par Euclide au IIIe siècle av. J.-C.. La construction moderne permet de généraliser la notion d'espace à des dimensions quelconques.

Les espaces vectoriels forment un outil fondamental pour les sciences de l'ingénieur et servent de base à de nombreux domaines dans la recherche opérationnelle.

En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, un espace vectoriel est un ensemble d'objets, appelés vecteurs qui peuvent être utilisés pour représenter certaines entités physiques comme des déplacements, additionnés ou multipliés par un scalaire. En d'autres termes, c'est un ensemble muni d'une structure permettant d'effectuer des combinaisons linéaires. Les scalaires sont généralement des nombres réels ou des nombres complexes, ou alors pris dans n'importe quel corps.

Définition 1 *Soit $\mathbb{K}$ un corp commutatif. On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ un ensemble E sur lequel on a défini deux lois de composition :*

1. *Une loi interne (c'est-à-dire $E \times E \to E$) dite addition, notée $+$, et vérifiant :*
   i) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\quad \forall x, y, z \in E$;
   ii) $x+y = y+x$, $\quad \forall x, y \in E$;
   iii) Il existe un élément de E noté 0_E, dit neutre, tel que
   $$\forall x \in E : x + 0_E = x$$
   ;
   vi) Pour tout $x \in E$, il existe un élément $(-x)$ dit opposé de x, tel que
   $$x + (-x) = 0_E$$
2. *Une loi externe de domaine $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire une application $\mathbb{K} \times E \to E$; on note λx ou $(\lambda . x)$ l'image dans E du couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$), qui vérifie :*
   a) $\lambda(\mu x) = \lambda\mu(x)$, $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E$;

b) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \ \forall x \in E$;
c) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in E$;
d) $1.x = x, \quad \forall x \in E$ *(1 étant l'élément neutre de la multiplication dans* $\mathbb{K}$*).*

Les éléments de $\mathbb{K}$ *sont dits scalaires et ceux de* E *vecteurs.*

Citons quelques exemples des espaces vectoriels.

Exemple 1 $E = \mathbb{R}^n$ *muni des lois suivantes est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{array}{l} (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \\ \lambda((x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \end{array} \tag{1.1.1}$$

Ici le $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \cdots, 0)$ *; l'opposé* $(-x)$ *de* $x = (x_1, \cdots, x_n)$ *est* $(-x_1, \cdots, -x_n)$*.*
De même $\mathbb{C}^n$ *est muni de structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *et plus généralement,* $\mathbb{K}^n$ *est muni de structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *avec les lois définies par les formules (1.1.1).*

Exemple 2 *L'ensemble* $\mathbb{R}_n[x]$ *des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *de degré* $\leq n$*, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{R}_n[x] = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_i \in \mathbb{R}\}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ *pour les lois :*

$$\begin{array}{l} (a_0 + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + \cdots + b_n x^n) = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n) x^n \\ \lambda(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = (\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n) \end{array} \tag{1.1.2}$$

Exemple 3 *Soit* $M_2(K)$ *l'ensemble des matrices d'ordre* 2 *à coefficients dans* $\mathbb{K}$*. On définit une structure d'espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$*, en posant :*

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} a' & b' \\ c' & d' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{array}\right) \\ \lambda \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{array}\right) \end{array} \tag{1.1.3}$$

L'élément neutre est évidemment la matrice nulle $\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$ *est l'opposé de* $\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$ *est* $\left(\begin{array}{cc} -a & -b \\ -c & -d \end{array}\right)$

1.2 Sous espaces vectoriels

Définition 2 *Soit* $(E, +, .)$ *un* $\mathbb{K}$*-e.v et* $F \subset E$*. On dit que* F *est un sous espace vectoriel de* E *si* $(F, +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$*-e.v.*

Proposition 1 *Soit* E *un espace vectoriel et* $F \subset E$*. Alors* F *est un sous espace vectoriel de* E *si et seulement si :*

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in F, x + y \in F$
3. $\forall x \in F, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in F$

Exemple 4 *Montrons que* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 3z = 0\}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*.*

1. $(0,0,0) \in F$ *car* $0+0+3\times 0=0$
2. *Soient* $X=(x,y,z)$, $X'=(x',y',z') \in F$. *On a* $X+X'=(x+x',y+y',z+z')$, *alors*
$$(x+x')+(y+y')+3(z+z')=(x+y+3z)+(x'+y'+3z')=0 \Rightarrow X+X' \in F$$
,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *on a* $\lambda X=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$, *alors*
$$\lambda x+\lambda y+3\lambda z=\lambda(x+y+3z)=0 \Rightarrow \lambda X \in F$$

Donc F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

1.3 Bases (en dimension finie)

Définition 3 *(**Famille génératrice**) Une famille de vecteurs* $\{v_1,\cdots,v_n\}$ *d'un espace vectoriel* E *est dite génératrice si* $E=Vec\{v_1,\cdots,v_n\}$, *ce qui veut dire que*
$$\forall x \in E, \exists \lambda_1,\cdots,\lambda_n \in K \text{ tel que } x=\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_n v_n$$

Définition 4 *(**Famille libre**) Une famille finie de vecteurs* $\{v_1,\cdots,v_n\}$ *d'un espace vectoriel* E *est dite libre si*
$$\exists \lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_n v_n=0 \Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

Définition 5 *Une famille génératrice et libre d'un espace vectoriel* E *est appelée une base de* E.

Exemple 5 *Soit* F *le sous espace vectoriel définie par :*
$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+3y+2z=0\right\}$$
Déterminons une base de F. *On a*
$$(x,y,z)\in F \Leftrightarrow x+3y+2z=0 \Leftrightarrow x=-3y-2z \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3y-2z \\ y=y \\ z=z \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(-3y-2z,y,z)=y(-3,1,0)+z(-2,0,1)$$
On pose $v_1=(-3,1,0)$ *et* $v_2=(-2,0,1)$. *Alors* $\{v_1,v_2\}$ *est une famille génératrice de* F. *Vérifions que* $\{v_1,v_2\}$ *est une famille libre.*
$$\text{soient } \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda v_1+\lambda_2 v_2=(0,0,0) \Leftrightarrow (-3\lambda_1-2\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3\lambda_1-2\lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$$
Alors $\{v_1,v_2\}$ *est une famille libre.*
Donc $\{v_1,v_2\}$ *est une base de* F.

1.4 Applications linéaires

Définition 6 *Soient E et F deux $\mathbb{K}e.v$ et f une application de E dans F . On dit que f est linéaire si :*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in E$;
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u), \quad \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{K}e.v$ noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 6 *Soient $C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $C^1([0,1], \mathbb{R})$ les espaces vectoriels des applications $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ respectivement continues et continues à dérivée continue. L'application*

$$\begin{aligned} D : C^0([0,1], \mathbb{R}) &\to C^1([0,1], \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

est une application linéaire car :

$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = Df + Dg$$

$$D(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda Df$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in D([0,1], \mathbb{R})$

Définition 7 *On appelle endomorphisme de E une application linéaire de E dans E.*

Définition 8 *Si $f : E \to F$ l'application linéaire. Son noyau noté $ker f$ c'est l'ensemble des vecteurs de E que f annule :*

$$ker f = \{v \in E | f(v) = 0\}$$

Proposition 2 *Le noyau d'une application linéaire de $E \to F$ est un sous espace vectoriel de E.*

Définition 9 *Si $f : E \to F$ l'application linéaire. Son image notée Imf c'est l'ensemble des vecteurs de F de la forme $f(v)$ avec $v \in E$:*

$$Imf = \{f(v) | v \in E\}$$

Exemple 7 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :*

$$f(x,y) = f(x-y, x+y, x-y)$$

Déterminons le noyau et l'image de f :

$$ker f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (0,0,0)\right\}$$

alors

$$f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x-y, x+y, x-y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x=0 \end{array} \right.$$

Donc

$$ker f = \{(0,0)\}$$

Maintenant

$$Imf = \left\{f(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

alors

$$f(x,y) = (x-y, x+y, x-y) = x(1,1,1) + y(-1,1,-1)$$

Donc

$$Imf = vect\{(1,1,1), (-1,1,-1)\}$$

1.5 Matrices associées aux applications linéaires

Dans cette section, on va d'abord définir c'est quoi une matrices, ensuite donner quelques propriétés qui seront nécessaires dans la suite de ce manuscrit.

Définition 10 *On appelle matrice de type (m, n) à coefficient dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ un tableau A de mn éléments de $\mathbb{K}$ rangés sur m lignes et n colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou en abrégé $A = (a_{ij})_{i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n}$.
L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Si $m = n$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 11 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*
Soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et f un endomorphisme de E.
On pose

$$f(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_j$$

Les coordonnées a_{ij} de ces vecteurs dans la base B, rangés en n colonnes, forment la matrice associée à f, relative à la base considérée

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \mathcal{M}_B(f) & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Exemple 8 *Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = (x + 2y + z, x - y, y + z)$$

et soit B la base de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On veut déterminer la matrice associée à f dans la base B, alors on a

$$f(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Alors

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3$$

De la même manière on obtient que

$$f(e_2) = e_1 + e_2 \text{ et } f(e_3) = 3e_2 - e_3$$

Donc

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.6 Matrice de passage

Maintenant si on considère une autre base $\{e_i'\}$ du même espace, on peut définir une autre matrice associée au même endomorphisme par rapport à cette nouvelle, les deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes sont liées entre eux par la relation

$$\mathcal{M}_{\{e_i'\}}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_{\{e_i\}}(f)P$$

tel que P est une matrice carrée inversible appelée matrice de passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{e_i'\}$ et

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,\mathrm{com}^t(P)$$

Pour déterminer la matrice de passage P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on doit passer par les étapes suivantes :

1. On décompose les vecteurs e_i' sur les éléments de la base $\{e_i\}$ pour avoir l'expression

$$e_i' = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \cdots + \alpha_{ni}e_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}e_k$$

2. Les composantes de e_i' dans la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ forment la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice P

$$P_{e_i \longrightarrow e_i'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 9 *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$f(x) = (x - z, 2x - 3y + z, y - 2z)$$

Soient

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$B' = \left\{ e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

on a

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} e_1' = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3 \\ e_2' = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3 \\ e_3' = \alpha_3 e_1 + \beta_3 e_2 + \gamma_3 e_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \\ \beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3 = 1 \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

par suite, on a

$$P_{B \longrightarrow B'} = \begin{array}{c c} \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathcal{M}_{B'}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_B(f)P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque 1 *Si on a deux matrices A et B vérifiant pour certaine matrice inversible P la relation $B = P^{-1}AP$, cela est équivaut à dire que les deux matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes et on dit qu'elle sont semblables.*

1.7 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 12 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. λ est une valeur propre de f s'il existe (au moins) un vecteur $v \neq 0$ de E tel que*

$$f(v) = \lambda v$$

Un tel vecteur est appelé vecteur propre associé à λ.

Remarque 2
- *Les valeurs propres peuvent être nulles.*
- *Si v est vecteur propre de f, alors par linéarité de f, αv est aussi vecteur propre de f pour tout $\alpha \neq 0$.*

1.7.1 Détermination des valeurs propres

Définition 13 *(polynôme caractéristique) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E de dimension finie. On appel polynôme caractéristique de f le polynôme*

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda Id) = \det(A - \lambda I)$$

tel que A est la matrice associée à f dans n'importe quelle base de E.

Remarque 3 *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique mais la réciproque est fausse.*

Proposition 3 *Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$.*

Définition 14 *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé le spectre de f et il est noté par $Sp(f)$.*

Définition 15 *(multiplicité) On dit qu'une valeur propre λ_0 de f est de multiplicité α si elle est racine d'ordre α du polynôme caractéristique de f, c'est-à-dire :*

$$P_f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{\alpha} Q(\lambda), \ Q(\lambda_0) \neq 0$$

et on la note par

$$\alpha = mult(\lambda_0)$$

1.7.2 Détermination des vecteurs propres

Une fois les valeurs propres sont déterminées, on détermine l'espace des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs en résolvant le système linéaire

$$(A - \lambda I)(v) = 0$$

où A est la matrice de f dans une certaine base.
Définition 16 *(Sous espaces propres). Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f , on note par $\mathbb{E}_\lambda$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$ défini par*

$$\mathbb{E}_\lambda = \{v \in \mathbb{E} : f(v) = \lambda v\}$$

cet ensemble est appelé sous espace propre correspondant à la valeur propre λ, il est formé par les vecteurs propres associés à cette valeur.

Exemple 10 *Soit la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Cherchons les vecteurs propres de B.

Valeurs propres :

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Les valeurs propres de B sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \ mult\,(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = 1, \ mult\,(\lambda_2) = 1 \\ \lambda_3 = 2, \ mult\,(\lambda_3) = 1 \end{cases}$$

Vecteurs propres :
On va résoudre le système $(B - \lambda I)v = 0$ et $v = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t$.
Pour $\lambda_1 = 0$:

$$(B - \lambda_1 I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \ quelconque \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut prendre $x_3 = 1$, et on obtient le vecteur propre

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 1$:

$$(B - \lambda_2 I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \ quelconque \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut prendre $x_3 = 1$, et on obtient le vecteur propre

$$v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda_3 = 2$:

$$(B - \lambda_3 I)\,v = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_2 \\ x_2 \ quelconque \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On peut prendre $x_2 = 1$, et on obtient le vecteur propre

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Définition 17 ***(Somme directe des sous espaces propres)****. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts. Alors les sous espaces $\mathbb{E}_{\lambda_1}, \cdots, \mathbb{E}_{\lambda_p}$ sont en somme directe.*