

Chapitre 3

Formes bilinéaires-Formes quadratiques

Dans ce chapitre on va traité les problèmes à caractère bilinéaire, autrement dit les problèmes qui dépendent d'une manière linéaire de deux vecteurs, par exemple, la distance entre deux points (pour calculer l'erreur) et le produit scalaire, il permet de définir la norme (dans certains cas de figure la norme sert à calculer l'énergie d'un système).

3.1 Formes bilinéaires, cas de dimension finie

Définition 1 (Forme bilinéaire) Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel. On appelle forme bilinéaire sur E une application

$$\begin{aligned} b : E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto b(x, y) \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions suivantes :

1. $\forall x, x', y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad b(\alpha x + \beta x', y) = \alpha b(x, y) + \beta b(x', y)$
2. $\forall x, y, y' \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad b(x, \alpha y + \beta y') = \alpha b(x, y) + \beta b(x, y')$

Exemple 1 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $b(x, y) = xy$

$\forall x, x', y, y' \in E$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$b(\alpha x + \beta x', y) = (\alpha x + \beta x')y = \alpha xy + \beta x'y = \alpha b(x, y) + \beta b(x', y)$$

donc b est linéaire par rapport à la première variable.

$$b(x, \alpha y + \beta y') = x(\alpha y + \beta y') = \alpha xy + \beta xy' = \alpha b(x, y) + \beta b(x, y')$$

donc b est linéaire par rapport à la deuxième variable.

Définition 2 (Symétrie) Soit b une forme bilinéaire sur un \mathbb{K} espace vectoriel E . On dit que

1. b est symétrique si

$$\forall x, y \in E, \quad b(x, y) = b(y, x)$$

2. b est anti-symétrique si

$$\forall x, y \in E, \quad b(x, y) = -b(y, x)$$

Exemple 2 Considérons la forme bilinéaire suivante sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 2 noté $\mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{cases} b : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Cette forme bilinéaire est symétrique car on a bien

$$b(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2) = Q(0)P(0) + Q(1)P(1) + 2Q(2)P(2) = b(Q, P)$$

Définition 3 (Définie positive) Soit b une forme bilinéaire sur un \mathbb{K} espace vectoriel E . Alors

1. La forme b est positive si

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) \geq 0$$

Exemple 3 Prenant l'exemple 2, on a la forme bilinéaire b est positive car

$$b(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + 2P(2)^2 \geq 0$$

2. la forme b est définie positive si

$$\forall x \in E, \quad b(x, x) \geq 0, \quad b(x, x) = 0 \iff x = 0$$

Exemple 4 On prend toujours le même exemple, alors on a la forme bilinéaire b est définie positive car l'équation

$$b(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + 2P(2)^2 = 0$$

implique que 0, 1, 2 sont racines de P . Cela fait trois racines pour un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. La seule possibilité est que le polynôme P soit le polynôme nul $P = 0$.

Définition 4 (Transposée d'une forme bilinéaire) Soit b une forme bilinéaire sur un \mathbb{K} espace vectoriel E , on appelle la transposée de b et on la note ${}^t b$ la forme bilinéaire définie par

$$\forall X, Y \in \mathbb{E} : \quad {}^t b(X, Y) = b(Y, X)$$

Définition 5 (Matrice associée à une forme bilinéaire) Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie n , b une forme bilinéaire définie sur E et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . On appelle une matrice associée à b dans la base B de E et on la note $\mathcal{M}_B(b)$ la matrice suivante

$$\mathcal{M}_B(b) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \cdots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \cdots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Exemple 5 Considérons la forme bilinéaire suivante sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 2

$$\begin{cases} b : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Soit $B = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, l'évaluation de cette forme bilinéaire sur toutes les paires de vecteurs de la base B donne

$$\mathcal{M}_B(b) = \begin{pmatrix} b(1, 1) & b(1, X) & b(1, X^2) \\ b(X, 1) & b(X, X) & b(X, X^2) \\ b(X^2, 1) & b(X^2, X) & b(X^2, X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{pmatrix}$$

Lemme 1 Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie n , b une forme bilinéaire définie sur E et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Si x et y sont deux vecteurs de E et si on note

$$X = \mathcal{M}_B(x), Y = \mathcal{M}_B(y)$$

alors

$$b(x, y) = {}^t X \mathcal{M}_B(b) Y$$

Proposition 1 (Formules de changement de bases) Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie n , b une forme bilinéaire définie sur E et B, B' deux bases de E . Alors

$$\mathcal{M}_{B'}(b) = {}^t P \mathcal{M}_B(b) P$$

avec P la matrice de passage de la base B à la base B' .

Exemple 6 Prenons la forme bilinéaire précédente (3.1.2). Considérons la nouvelle base $B' = \{X, X - 2, X(X - 2)\}$. Si on écrit la matrice associée à cette nouvelle base en utilisant la définition, on trouve

$$\mathcal{M}_{B'}(b) = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base B à la base B' est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$${}^t P \mathcal{M}_B(b) P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque bien que la formule de changement de base redonne bien la matrice précédente $\mathcal{M}_{B'}(b)$.

Définition 6 (Rang d'une matrice) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle le rang de la matrice A la dimension de l'image de A .

$$\text{rg } A = \dim \{y \in \mathbb{K}^n / \exists x \in \mathbb{K}^n : y = Ax\}$$

ou encore

$$\text{rg } A = n - \dim \ker A$$

Définition 7 (Noyau) Soit b une forme bilinéaire sur un \mathbb{K} espace vectoriel E de dimension finie. Alors le rang de la forme b est le rang de la matrice associée à cette forme dans une base quelconque de E .

$$\text{rg } b = \text{rg } \mathcal{M}_B(b)$$

Définition 8 Soit b une forme bilinéaire sur un \mathbb{K} espace vectoriel E de dimension finie.

1. Le noyau de b est donné par

$$\mathcal{N}(b) = \{Y \in \mathbb{E} / \forall X \in \mathbb{E} : b(X, Y) = 0\}$$

2. La forme b est non dégénérée si

$$\mathcal{N}(b) = 0$$

ou en d'autres termes, si

$$b(X, Y) = 0, \forall X \in \mathbb{E} \Rightarrow Y = 0$$

Proposition 2 Le noyau de b est le noyau de la matrice qui représente b dans une base quelconque de E et on le note $\mathcal{N}(b)$.

Exemple 7 Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la forme bilinéaire qui est définie dans la base canonique par

$$\begin{aligned} b(x, y) &= x_1y_1 - 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_2 - 3x_2y_3 \\ &= (y_1 + y_2 + y_3)x_1 + (y_1 - 3y_3)x_2 + (-y_1 - 3y_2 - 3y_3)x_3 \end{aligned}$$

donc $y \in \mathcal{N}(b)$ si et seulement si

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - 3y_3 = 0 \\ -y_1 - 3y_2 - 3y_3 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve $y_1 = 3y_3$, $y_2 = -2y_3$, $y_3 \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{N}(b)$ est engendré par le

vecteur $y = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On aurait pu déterminer directement C à l'aide la matrice de b

$$\mathcal{M}_{e_i}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\mathcal{N}(b) \neq 0$, alors b est dégénérée.

Définition 9 Soit b une forme bilinéaire sur un \mathbb{K} espace vectoriel E de dimension finie n . Alors b est non dégénérée si et seulement si

$$\text{rg } b = n = \dim E$$

Théorème 1 (Théorème du rang pour les formes bilinéaires) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit b une forme bilinéaire sur E , alors

$$\dim E = \text{rg } b + \dim \mathcal{N}(b)$$

3.2 Formes quadratiques, cas de dimension finie

Définition 10 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle forme quadratique sur E toute application q de la forme

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto s(x, x) \end{aligned}$$

où s est une forme bilinéaire symétrique sur E .

Définition 11 (Polynôme homogène) Soit $q \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, on dit qu'il est homogène de degré deux si

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall X \in \mathbb{K}^n : \quad q(\lambda X) = \lambda^2 q(X)$$

Remarque 1 Un polynôme q est homogène de degré deux si et seulement si, il s'écrit

$$q(x) = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l$$

avec $a_{kl} \in \mathbb{K}$ des coefficients fixés.

Proposition 3 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , et q une application définie sur E à valeurs dans \mathbb{K} . Alors q est une forme quadratique sur E si et seulement si elle est un polynôme homogène de degré deux.

Exemple 8 Soit l'application $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$$

où les x_i sont les composantes de x dans la base canonique. On a q est un polynôme de degré 2, alors q est une forme quadratique.

Proposition 4 Soit q une forme quadratique sur E . Il existe une unique forme bilinéaire symétrique s telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = s(x, x)$. La forme bilinéaire s s'appelle la forme polaire de q et on a

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad s(x, y) = \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4} [q(x+y) - q(x-y)]$$

Exemple 9 Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$$

La forme polaire associée à q est la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$s(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$

Définition 12 (Matrice d'une forme quadratique) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et soit q une forme quadratique sur E . On définit la matrice associée à la forme q comme étant la matrice associée à sa forme polaire s et le rang de q est le rang de cette matrice.

Exemple 10 Prenons la forme quadratique précédente $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$$

La matrice associée à q dans la base canonique est donnée par

$$\mathcal{M}_{e_i}(q) = \mathcal{M}_{e_i}(s) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Définition 13 (Rang, noyau d'une forme quadratique)

1. Le rang, noyau de la forme quadratique est le rang, noyau de sa forme polaire.

$$\text{rg } q := \text{rg } s$$

$$\mathcal{N}(q) := \mathcal{N}(s)$$

2. q est dite non dégénérée si sa forme polaire s est non dégénérée, c'est-à-dire $\mathcal{N}(s) = 0$, ce qui signifie :

$$s(x, y) = 0, \forall y \in E \Rightarrow x = 0$$

3. Si q est une forme quadratique à valeurs réelles, q est dite définie positive si sa forme polaire s est définie positive, c'est-à-dire si :

$$q(x) \geq 0, \forall x \in E \text{ et } q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Définition 14 (Vecteur isotrope, cône isotrope) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et q une forme quadratique sur E , on dit que v est un vecteur isotrope si

$$q(v) = 0$$

L'ensemble des vecteurs isotropes de q est appelé le cône isotrope et est noté

$$\mathcal{I}(q) = \{x \in E, q(x) = 0\}$$

Remarque 2 Notons que $\mathcal{I}(q)$ n'est pas un espace vectoriel.

Exemple 11 Soit $E \in \mathbb{R}^2$ et $q = x_1^2 - x_2^2$. On a

$$\mathcal{I}(q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = \pm x_2\}$$

voir figure suivante.

C:/Users/sabbagh/Documents/algebre/polyalg3/cone.png

3.3 Bases orthogonales

Définition 15 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , b une forme bilinéaire symétrique et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Alors

1. On dit que B est une base orthogonale de E si

$$\forall k, l = 1, \dots, n, k \neq l : b(e_k, e_l) = 0$$

2. On dit que B est normalisé si

$$\forall k = 1, \dots, n : b(e_k, e_k) = 1$$

3. On dit que B est orthonormée si elle est à la fois orthogonale et normalisée

$$\forall k, l = 1, \dots, n, k \neq l : b(e_k, e_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Proposition 5 Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Remarque 3 Soit b une forme bilinéaire symétrique et B une base de E . Alors

1. $\mathcal{M}_b(B)$ est diagonale si et seulement si B est orthogonale.
2. $\mathcal{M}_b(B)$ admet que des 1 sur sa diagonale si et seulement si B est normalisée.
3. $\mathcal{M}_b(B) = I$ si et seulement si B est orthonormée.

3.4 Réduction des formes quadratiques

Chercher une base orthogonale revient donc à déterminer une base dans laquelle la matrice de q est diagonale, ou aussi, à écrire q sous la forme d'une somme de termes carrés. Pour cela on va présenter deux méthodes, la méthode de Gauss et la méthode des dérivées partielles.

Il ne faut pas confondre ce problème avec la diagonalisation des endomorphismes. Si A est la matrice d'un endomorphisme, la diagonaliser signifie chercher une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Ici il s'agit de chercher une matrice P telle que t^PAP soit diagonale.

3.4.1 Méthode de Gauss

Cette méthode s'applique que lorsque la forme quadratique admet dans son expression au moins un terme carré.

Soit \mathbb{R}^3 vu comme étant un \mathbb{R} -espace vectoriel et q une forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

On considère un terme carré quelconque par exemple x_1^2 , On va utiliser la formule suivante

$$a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2$$

1. On ordonne suivant le paramètre x_1

$$q(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2}_{\text{termes en } x_1} + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

2. On écrit les termes en x_1 comme le début d'un carré

$$q(x) = \underbrace{(x_1 + x_2)^2 - x_2^2}_{\text{termes en } x_1} + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

3. On refait le même travail sur x_2

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{x_2^2 - 4x_2x_3}_{\text{termes en } x_2} + 5x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 4x_3^2 + 5x_3^2$$

4. On continue l'opération jusqu'à la disparition de tous les termes rectangles

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$$

3.4.2 Méthode des dérivées partielles

Cette méthode s'applique lorsque la forme quadratique n'admet aucun terme carré dans son expression.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel et soit q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$$

1. On choisit un terme rectangle $\mathcal{K}x_kx_l$ avec $\mathcal{K} \neq 0$. Dans notre cas on prend

$$5x_1x_2$$

2. On calcul les dérivée partielles $\partial_{x_k} q$ et $\partial_{x_l} q$. Dans notre cas on a

$$\partial_{x_1} q(x) = 5x_2 + 6x_3, \quad \partial_{x_2} q(x) = 5x_1 + 3x_3$$

3. On écrit q sous la forme

$$\forall x \in E : q(x) = \frac{1}{\mathcal{K}} \partial_{x_k} q(x) \partial_{x_l} q(x) + \text{terme correctif}$$

Dans notre cas on a

$$\forall x \in E : q(x) = \frac{1}{5} \underbrace{(5x_2 + 6x_3)}_{\varphi_1} \underbrace{(5x_1 + 3x_3)}_{\varphi_2} - \frac{18}{5} x_3^2$$

4. On écrit alors

$$\varphi_1 \varphi_2 = \frac{1}{4} (\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4} (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

pour avoir la forme finale

$$\forall x \in E : \varphi(x) = \frac{1}{4\mathcal{K}} (\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{4\mathcal{K}} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \text{terme correctif}$$

Dans notre cas on aura

$$\forall x \in E : \varphi(x) = \frac{1}{20} (5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20} (5x_1 - 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5} x_3^2$$

Remarque 4 Si dans le terme correctif on a un terme rectangle on refait les mêmes étapes au niveau de ce terme. Si on a un mélange de termes carrés et de termes rectangles on utilise la méthode de gauss au niveau de ce terme.

3.5 Classification des formes quadratiques

Théorème 2 (Sylvester) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E . Alors il existe une base e_i de E telle que

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

et

$$q(x) = \sum_{k=1}^p x_k^2 - \sum_{k=p+1}^r x_k^2 \quad (3.5.1)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_{e_i}(q) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & -1 \end{matrix}} & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

tel que

$$r = \text{rg}(q)$$

et p un entier qui ne dépend que de la forme de q et non de la base.

Remarque 5 Pour déterminer la réduction de Sylvester on applique la réduction de Gauss.

Définition 16 (Signature d'une forme quadratique) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E telle que la réduction de Sylvester est donnée par l'équation 3.5.1. On appelle la signature de la forme q et on la note $\text{sign}(q)$ le couple $(p, r - p)$.

Lemme 2 Soit q une forme quadratique sur un \mathbb{R} espace vectoriel E de dimension finie n . Alors on a les assertions suivantes :

1. q est définie positive si et seulement si

$$\text{sign } q = (n, 0)$$

2. q est non dégénérée si et seulement si

$$\text{sign } q = (p, n - p)$$

Théorème 3 Soit q une forme quadratique sur un \mathbb{R} espace vectoriel E de dimension finie n et B une base de E , ce qui donne que

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

tel que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est le vecteur composante du vecteur x dans la base B .

Lorsqu'on fait la réduction sous la forme de Sylvester on obtient

$$q(x) = \sum_{k=1}^p x_k'^2 - \sum_{k=p+1}^r x_k'^2$$

tel que x_k' sont une expression linéaire des x_j ce qui donne que pour une certaine matrice A , on a

$$X' = AX, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Alors X' c'est les composantes du vecteur x dans une nouvelle base de E qu'on la note B' . $P = A^{-1}$ est la matrice de passage de B à B' avec B' est une base orthogonale.