

..

Contents

| | | |
|----------|---|----------|
| 2 | Equations aux dérivées partielles | 3 |
| 2.1 | Introduction | 3 |
| 2.2 | C'est quoi une EDP? | 3 |
| 2.3 | Classification des EDP | 4 |
| 2.4 | Conditions aux limites des EDP | 5 |
| 2.5 | Méthodes numériques de résolution | 6 |
| 2.5.1 | Méthode des différences finies | 6 |
| 2.5.2 | Méthode des éléments finis | 11 |

Chapter 2

Equations aux dérivées partielles

2.1 Introduction

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles abrégée en EDP, est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien dans la mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou dans l'électromagnétisme (équations de Maxwell).

la résolution des équations aux dérivées partielles est un sujet important. C'est aussi un domaine très travaillé et encore en plein développement. A part dans quelques cas particuliers, il est impossible de calculer explicitement des solutions des différents modèles qu'on présentera par la suite. Il est donc nécessaire d'avoir recours au calcul numérique sur ordinateur pour estimer quantitativement et qualitativement ces solutions.

Il existe de nombreuses méthodes d'approximation numérique des solutions d'équations aux dérivées partielles. On va présenter dans ce chapitre une des plus anciennes et plus simples appelée méthode des différences finies et une autre méthode appelée éléments finis.

2.2 C'est quoi une EDP?

Une équation différentielle partielle très simple est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

où u est une fonction inconnue de x et y . Cette équation implique que les valeurs $u(x, y)$ sont indépendantes de x . Les solutions de cette équation sont :

$$u(x, y) = f(y)$$

où f est une fonction de y .

L'équation différentielle ordinaire

$$\frac{du}{dx} = 0$$

a pour solution :

$$u(x) = c$$

avec c une valeur constante (indépendante de x). Ces deux exemples illustrent qu'en général, la solution d'une équation différentielle ordinaire met en jeu une constante arbitraire, tandis que les équations aux dérivées partielles mettent en jeu des fonctions arbitraires. Une solution des équations aux dérivées partielles n'est généralement pas unique.

Pour les EDP, on peut écrire u la fonction inconnue et $D_x u$ (notation française) ou u_x (notation anglo-saxonne, plus répandue) sa dérivée partielle par rapport à x , soit avec les notations habituelles du calcul différentiel :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

et pour les dérivées partielles secondes :

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

2.3 Classification des EDP

Definition 1 On appelle **ordre** d'une équation aux dérivées partielles l'ordre de la plus grande dérivée présente dans l'équation.

Les EDP peuvent être classées suivant une autre méthode si nous considérons des EDP linéaires du second ordre de la forme

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g \quad (2.3.1)$$

où a, b, c, f sont des fonctions qui dépendent de x et y .

a une analogie avec la classification des coniques selon la forme quadratique

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation (2.3.1) est hyperbolique.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation (2.3.1) est parabolique.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation (2.3.1) est elliptique.

Si on applique les conditions précédentes aux divers modèles du deuxième ordre, en remplaçant le couple (x, y) par les variables (x, t) , on obtient les trois types d'équations les plus connues :

1. **équation des ondes** : c'est une équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t)$$

où $c > 0$ est la vitesse de propagation de la déformation de l'onde.

2. **équation de la chaleur** : c'est une équation parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t)$$

où $\mu > 0$ est un coefficient donné qui correspond à la diffusion thermique.

3. **équation de Laplace ou équation de poisson (une seule variable)**: c'est une équation elliptique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y) = f(x, y)$$

2.4 Conditions aux limites des EDP

Les problèmes aux limites sont des problèmes différentiels posés sur un intervalle $]a, b[$ de la droite réelle, ou sur un ouvert à plusieurs dimensions $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), pour lesquelles les valeurs de l'inconnu (ou de ses dérivées) sont fixées aux extrémités a et b ou sur le bord $\partial\Omega$ dans le cas multidimensionnel.

Dans le cas multidimensionnel, l'équation différentielle met en jeu les dérivées partielles de la solution par rapport aux coordonnées d'espaces. Les équations qui dépendent aussi du temps (t), comme l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes, sont appelées problèmes aux limites et aux valeurs initiales. Pour ce type d'équation on doit aussi fournir la valeur de la solution au point $t = 0$.

En mathématiques, une condition aux limites de Dirichlet (nommée d'après Johann Dirichlet) est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières ou limites du domaine. Voici quelques exemples :

- Pour une équation différentielles :

$$y'' + y' = 0$$

La condition aux limites de Dirichlet sur le l'intervalle $[a, b]$ s'exprime alors

$$y(a) = \alpha \text{ et } y(b) = \beta$$

où α et β sont deux nombres donnés.

- Pour une équation aux dérivées partielles :

$$\Delta y + y = 0$$

où Δ est l'opérateur de Laplace ou le Laplacien définit par

$$\Delta y = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$$

la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s'exprime par :

$$y(x) = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

où f est une fonction connue définie sur $\partial\Omega$

Il y a plusieurs conditions aux limites comme celles de Neumann, de Robin, etc.

2.5 Méthodes numériques de résolution

2.5.1 Méthode des différences finies

Le principe de toutes les méthodes de résolution numériques des équations aux dérivées partielles et d'obtenir des valeurs numériques discrètes (c'est-à-dire en nombre fini) qui approchent la solution exacte.

Les problèmes différentiels présentés précédemment admettent une infinité de solutions. Pour avoir l'unicité, il faut imposer des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$ de Ω et pour les problèmes dépendant du temps, des conditions initiales en $t = 0$.

On considère l'équation de Poisson

$$-u''(x) = f(x), x \in]a, b[\quad (2.5.1)$$

ou en plusieurs dimensions

$$-\Delta u(X) = f(X), X = (x_1, \dots, x_d)^T \in \Omega \quad (2.5.2)$$

où f est une fonction donnée et Δ est le Laplacien.

a- Le cas monodimensionnel:

Dans le cas monodimensionnel, une possibilité pour déterminer de manière unique la solution, consiste à imposer la valeur de u en $x = a$ et $x = b$.

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in]a, b[\\ u(a) = \alpha, u(b) = \beta \end{cases} \quad (2.5.3)$$

où α et β sont deux réels donnés.

L'équation différentielle (2.5.3) doit être satisfaite en particulier pour x_j (noeuds) intérieure à $]a, b[$, c'est-à-dire :

$$-u''(x_j) = f(x_j), j = 1, \dots, N$$

On peut approcher cet ensemble de N équation en remplaçant la dérivée seconde par une formule de différences finies. Par exemple, si $u :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction assez régulière au voisinage d'un point $\bar{x} \in]a, b[$, alors la quantité

$$u''(\bar{x}) \simeq \frac{u(\bar{x} + h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} - h)}{h^2}$$

est une approximation de u'' par rapport à h . Ceci suggère d'approcher ainsi le problème (2.5.3) : trouver $\{u_j\}_{j=1}^N$ tels que :

$$\begin{cases} -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f(x_j), j = 1, \dots, N \\ u_0 = \alpha, u_{N+1} = \beta \end{cases} \quad (2.5.4)$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} = f(x_1) \\ -\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} = f(x_2) \\ \vdots \\ -\frac{u_N - 2u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2} = f(x_{N-1}) \\ -\frac{u_{N+1} - 2u_N + u_{N-1}}{h^2} = f(x_N) \end{cases} \quad (2.5.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -u_2 + 2u_1 - \alpha = h^2 f(x_1) \\ u_3 + 2u_2 - u_1 = h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ -u_N + 2u_{N-1} - u_{N-2} = h^2 f(x_{N-1}) \\ -\beta + 2u_N - u_{N-1} = h^2 f(x_N) \end{cases} \quad (2.5.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -u_2 + 2u_1 = h^2 f(x_1) + \alpha \\ u_3 + 2u_2 - u_1 = h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ -u_N + 2u_{N-1} - u_{N-2} = h^2 f(x_{N-1}) \\ 2u_N - u_{N-1} = h^2 f(x_N) + \beta \end{cases} \quad (2.5.7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Au_h = h^2 f \quad (2.5.8)$$

avec $u_h = (u_1, \dots, u_N)^T$ est le vecteur des inconnus.

$f = \left(f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2}, f(x_2), \dots, f(x_{N-1}), f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \right)^T$, et $A = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$ est la matrice tridiagonale.

b- Le cas bidimensionnel:

On considère le problème de Poisson (2.5.2), dans une région bidimensionnelle Ω .

La méthode des différences finies consiste à approcher les dérivées partielles présentes dans l'EDP à l'aide de taux d'accroissement calculés sur une grille constituée d'un nombre fini de noeuds. La solution u est alors approchée seulement en ces noeuds.

La première étape consiste alors à définir la grille de calcul. Supposons pour simplifier que Ω soit un rectangle $]a, b[\times]c, d[$. Introduisons une partition de $]a, b[$ en sous-intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i = 0, \dots, N_x$ avec $x_0 = a$ et $x_{N_x+1} = b$.

Notons par $\Delta_x = \{x_0, \dots, x_{N_x+1}\}$ l'ensemble des extrémités de ces intervalles et $h_x = \max_{i=0, \dots, N_x} (x_{i+1} - x_i)$ leur longueur maximale.

On discrétise de la même manière y , $\Delta_y = \{y_0, \dots, y_{N_y+1}\}$ avec $y_0 = c$, $y_{N_y+1} = d$ et $h_y = \max_{j=0, \dots, N_y} (y_{j+1} - y_j)$. Le produit cartésien $\Delta_h = \Delta_x \times \Delta_y$ définit la grille de calcul sur Ω (voir figure ?), et $h = \max\{h_x, h_y\}$ mesure le pas de discrétisation.

On cherche les valeurs $u_{i,j}$ qui approchent $u(x_i, y_j)$. On suppose pour simplifier que les noeuds sont uniformément espacés, c'est-à-dire $x_i = x_0 + ih_x$ pour $i = 0, \dots, N_x + 1$ et $y_j = y_0 + jh_y$ $j = 0, \dots, N_y + 1$.

Les dérivées partielles du second ordre peuvent être approchées par des taux d'accroissements, comme on l'a fait pour les dérivées ordinaires.

Dans le cas d'une fonction de deux variables, on définit le taux d'accroissement suivant

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} &= \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} \\ \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2} &= \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2}\end{aligned}\quad (2.5.9)$$

Soit le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}\quad (2.5.10)$$

avec

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2}\right) = f(x_i, y_j), & \text{sur } \Omega \\ u_{i,j} = g_{i,j}, \forall i, j \text{ tels que } (x_i, y_j) \in \partial\Delta_h \end{cases}\quad (2.5.11)$$

En remplaçant (2.5.9) dans notre problème on obtient

$$-\left[\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{i,j}\right]$$

\Rightarrow

$$-\left[\frac{1}{h_x^2}u_{i-1,j} + \frac{1}{h_y^2}u_{i,j-1} - 2u_{i,j} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) + \frac{1}{h_y^2}u_{i,j+1} + \frac{1}{h_x^2}u_{i+1,j}\right] = f_{i,j}$$

Le système obtenu peut être écrit sous une forme agréable, c'est-à-dire en numérotant les noeuds (les inconnus) de gauche à droite et de bas en haut. On obtient un système de la forme (2.5.8), avec une matrice $A \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ tridiagonale par bloc

$$A = \text{tridiag}(D, T, D)$$

Elle comporte N_y lignes et N_x colonnes et chaque terme est une matrice $N_x \times N_x$.

La matrice $D \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ est diagonale et ses coefficients sont $-\frac{1}{h_y^2}$.

La matrice $T \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ est tridiagonale symétrique

$$T = \text{tridiag}\left(-\frac{1}{h_x^2}, \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}, -\frac{1}{h_x^2}\right)$$

La matrice A est symétrique définie positive.

Exemple 1 *Le déplacement transverse u par rapport au plan de référence $z = 0$ d'une membrane élastique soumise à un chargement $f(x, y) = 8\pi^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$ qui vérifie le problème de Poisson (2.5.2) dans le domaine $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$.*

On choisit les données de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} g(0, y) = g(1, y) = 0, \forall y \in]0, 1[\\ g(x, 0) = g(x, 1) = \sin(2\pi x), \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

On prend $h_x = 0.25$, alors $N_x = 3$ et $h_y = \frac{1}{3}$, alors $N_y = 2$. La solution exacte de ce problème est donnée par $u(x, y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$.

On reprend le rectangle Ω (voir 2.1), on le discrétise (voir figure 2.2) et on applique le schéma des différences finies.

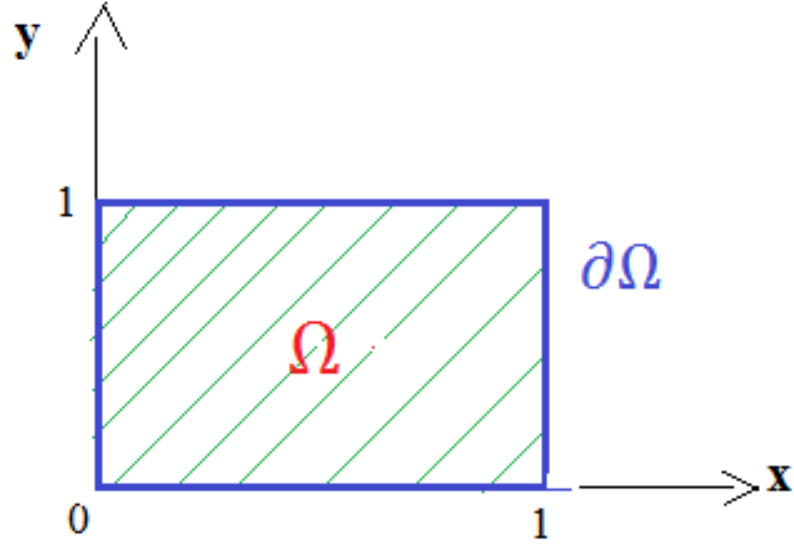


Fig. 2.1:

Pour $i = 1, j = 1$

$$-\frac{1}{h_x^2}u_{0,1} - \frac{1}{h_y^2}u_{1,0} + 2u_{1,1} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2}u_{1,2} - \frac{1}{h_x^2}u_{2,1} = f_{1,1}$$

Pour $i = 2, j = 1$

$$-\frac{1}{h_x^2}u_{1,1} - \frac{1}{h_y^2}u_{2,0} + 2u_{2,1} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2}u_{2,2} - \frac{1}{h_x^2}u_{3,1} = f_{2,1}$$

Pour $i = 3, j = 1$

$$-\frac{1}{h_x^2}u_{2,1} - \frac{1}{h_y^2}u_{3,0} + 2u_{3,1} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2}u_{3,2} - \frac{1}{h_x^2}u_{4,1} = f_{3,1}$$

Pour $i = 1, j = 2$

$$-\frac{1}{h_x^2}u_{0,2} - \frac{1}{h_y^2}u_{1,1} + 2u_{1,2} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2}u_{1,3} - \frac{1}{h_x^2}u_{2,2} = f_{1,2}$$

Pour $i = 2, j = 2$

$$-\frac{1}{h_x^2}u_{1,2} - \frac{1}{h_y^2}u_{2,1} + 2u_{2,2} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2}u_{2,3} - \frac{1}{h_x^2}u_{3,2} = f_{2,2}$$

Pour $i = 3, j = 2$

$$-\frac{1}{h_x^2}u_{2,2} - \frac{1}{h_y^2}u_{3,1} + 2u_{3,2} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2}u_{3,3} - \frac{1}{h_x^2}u_{4,2} = f_{3,2}$$

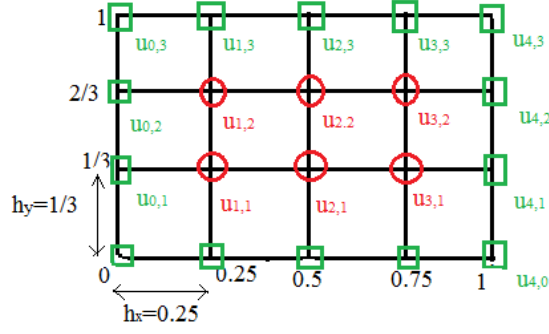


Fig. 2.2:

On obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2u_{1,1} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2} u_{1,2} - \frac{1}{h_x^2} u_{2,1} = f_{1,1} + \frac{1}{h_x^2} u_{0,1} + \frac{1}{h_y^2} u_{1,0} \\ -\frac{1}{h_x^2} u_{1,1} + 2u_{2,1} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2} u_{2,2} - \frac{1}{h_x^2} u_{3,1} = f_{2,1} + \frac{1}{h_y^2} u_{2,0} \\ -\frac{1}{h_x^2} u_{2,1} + 2u_{3,1} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_y^2} u_{3,2} = f_{3,1} + \frac{1}{h_y^2} u_{3,0} + \frac{1}{h_x^2} u_{4,1} \\ -\frac{1}{h_x^2} u_{0,2} - \frac{1}{h_y^2} u_{1,1} + 2u_{1,2} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_x^2} u_{2,2} = f_{1,2} + \frac{1}{h_x^2} u_{0,2} + \frac{1}{h_y^2} u_{1,3} \\ -\frac{1}{h_x^2} u_{1,2} - \frac{1}{h_y^2} u_{2,1} + 2u_{2,2} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{1}{h_x^2} u_{3,2} = f_{2,2} + \frac{1}{h_y^2} u_{2,3} \\ -\frac{1}{h_x^2} u_{2,2} - \frac{1}{h_y^2} u_{3,1} + 2u_{3,2} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) = f_{3,2} + \frac{1}{h_y^2} u_{3,3} + \frac{1}{h_x^2} u_{4,2} \end{cases}$$

d'où on obtient les système matriciel

$$Au_h = F$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) & -\frac{1}{h_x^2} & 0 \\ -\frac{1}{h_x^2} & 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) & -\frac{1}{h_x^2} \\ 0 & -\frac{1}{h_x^2} & 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h_y^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_y^2} \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h_y^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_y^2} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) & -\frac{1}{h_x^2} & 0 \\ -\frac{1}{h_x^2} & 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) & -\frac{1}{h_x^2} \\ 0 & -\frac{1}{h_x^2} & 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix} 50 & -16 & 0 \\ -16 & 50 & -16 \\ 0 & -16 & 50 \end{matrix} & \begin{matrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{matrix} & \begin{matrix} 50 & -16 & 0 \\ -16 & 50 & -16 \\ 0 & -16 & 50 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,1} + \frac{1}{h_x^2}u_{0,1} + \frac{1}{h_y^2}u_{1,0} \\ f_{2,1} + \frac{1}{h_y^2}u_{2,0} \\ f_{3,1} + \frac{1}{h_y^2}u_{3,0} + \frac{1}{h_x^2}u_{4,1} \\ f_{1,2} + \frac{1}{h_x^2}u_{0,2} + \frac{1}{h_y^2}u_{1,3} \\ f_{2,2} + \frac{1}{h_y^2}u_{2,3} \\ f_{3,2} + \frac{1}{h_y^2}u_{3,3} + \frac{1}{h_x^2}u_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30.4784 \\ 0 \\ 30.4784 \\ -30.4784 \\ 0 \\ 30.4784 \end{pmatrix}$$

et

$$u_h = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7434 \\ 0 \\ 0.7434 \\ -0.7434 \\ 0 \\ 0.7434 \end{pmatrix}$$

2.5.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une alternative à la méthode des différences finies pour approcher les problèmes aux limites. Elle est basée sur la reformulation du problème (??).

a- Le cas monodimensionnel:

Considérons le problème (??) et multiplions les deux membres de l'égalité par une fonction $v \in C^1([a, b])$ et on intègre l'égalité sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient :

$$-u'' = f$$

$$\Leftrightarrow -u''(x)v(x) = f(x)v(x)$$

$$\Leftrightarrow -\int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

En effectuant une intégration par partie, on obtient:

$$(u'(x)v(x))' = u''(x)v(x) + u'(x)v'(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b (u'(x)v(x))' dx = \int_a^b u''(x)v(x)dx + \int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b u''(x)v(x)dx = \int_a^b (u'(x)v(x))' dx - \int_a^b u'(x)v'(x)dx = [u'(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

Alors

$$\begin{aligned} - \int_a^b u''(x)v(x)dx &= \int_a^b f(x)v(x)dx \\ \Leftrightarrow - [u'(x)v(x)]_a^b + \int_a^b u'(x)v'(x)dx &= \int_a^b f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Si on suppose de plus que v s'annule aux extrémités $x = a$ et $x = b$ (c'est-à-dire : $v(a) = v(b) = 0$), alors le problème (??) devient:

trouver $u \in C^1([a, b])$ tel que $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$ et

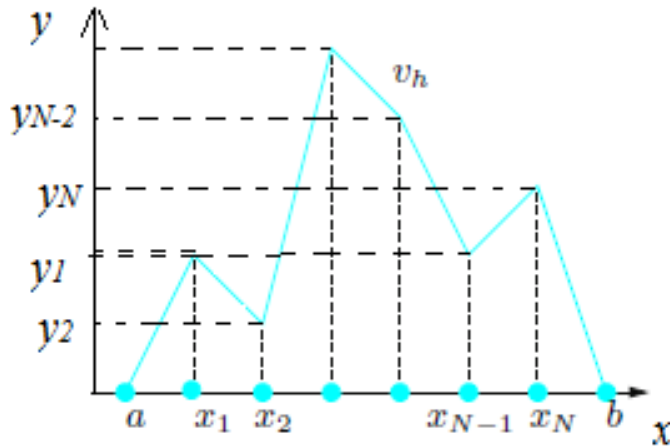
$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad (2.5.12)$$

Cette équation s'appelle formulation faible du problème (??).

On discrétise maintenant l'intervalle $[a, b]$, en le subdivisant en $(N + 1)$ intervalles où $h = x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, N$, alors l'équation (2.5.12) devient :

$$\sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)v'(x)dx = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)v(x)dx \quad (2.5.13)$$

En interpolant v sur chaque intervalle $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, on obtient la fonction affine par morceaux v_h (voir la figure suivante).



On utilise l'interpolation de Lagrange sur chaque intervalle $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, on a $v_h = L(x)$, un polynôme de degré inférieure ou égale à 1 et sur chaque noeud (x_i, y_i) , on a $v_h(x_i) \simeq v(x_i)$.

$$L(x) = \sum_{j=0}^N l_j(x) y_j$$

avec $y_j = v(x_j)$.

On prend $N = 4$, donc on a $(x_0 = a, x_1, x_2, x_3, x_4 = b)$ et $(y_0 = v(a) = 0, y_1, y_2, y_3, y_4 = v(b) = 0)$, on obtient alors

$$v_h = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1, & x \in [x_0, x_1] \\ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} y_2 + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} y_3, & x \in [x_2, x_3] \\ \frac{x - x_4}{x_3 - x_4} y_3 + \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} y_4, & x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

Soit

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}, & x \in [x_2, x_3] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}, & x \in [x_2, x_3] \\ \frac{x - x_4}{x_3 - x_4}, & x \in [x_3, x_4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

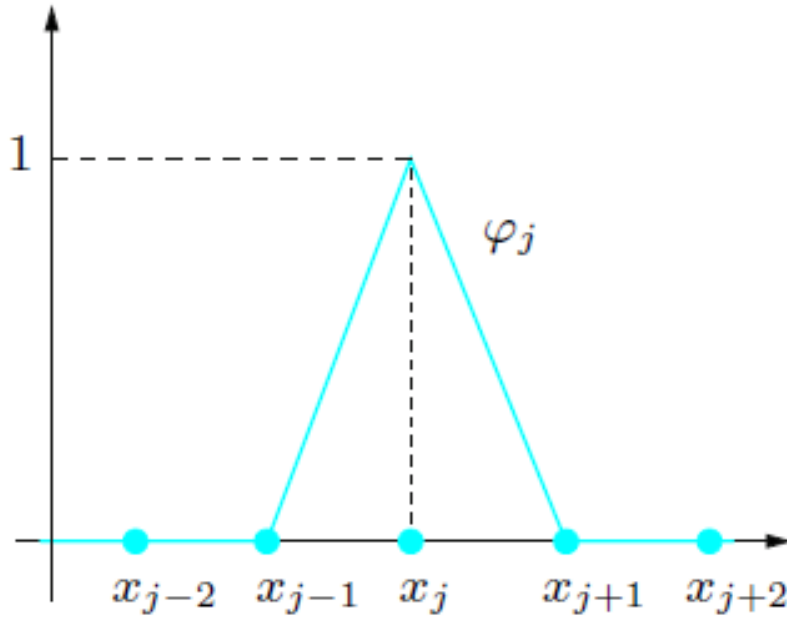
Alors

$$v_h(x) = \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2 + \varphi_3(x) y_3$$

On remarque que

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qu'on appelle les fonction de base (voir la figure suivante).



De la même manière on interpole u sur l'intervalle I_i , on obtient la fonction affine par morceaux u_h .

$$u_h(x) = \varphi_0(x)u_0 + \varphi_1(x)u_1 + \varphi_2(x)u_2 + \varphi_3(x)u_3 + \varphi_4(x)u_4$$

avec

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}, & x \in [x_3, x_4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors l'équation (2.5.13) devient:

$$\sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h'(x)v_h'(x)dx = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)v_h(x)dx \quad (2.5.14)$$

où

$$u_h \in V_h = \{v_h \in C^0([a, b]), v_h = P_1 \text{ sur } I_i\}$$

On appelle V_h l'espace des éléments finis de degré 1. et

$$v_h \in V_h^0 = \{v_h \in V_h, v_h(a) = v_h(b) = 0\}$$

Les fonctions V_h^0 sont affines par morceaux. Toute fonction v_h de V_h^0 admet la représentation

$$v_h = \sum_{i=0}^N y_i \varphi_i(x)$$

où

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x \in I_{i-1} \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & \text{si } x \in I_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\varphi_i(x)$ est une famille génératrice de V_h^0 car

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) + \dots + \lambda_N\varphi_N(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \text{ pour } x = x_1 \\ \lambda_2 = 0 \text{ pour } x = x_2 \\ \lambda_3 = 0 \text{ pour } x = x_3 \\ \vdots \\ \lambda_N = 0 \text{ pour } x = x_N \end{cases}$$

donc elle est libre, alors $\{\varphi_i\}$ est une base de V_h^0 . Donc on peut se contenter de satisfaire (2.5.14) seulement pour les fonctions de base φ_i , $i = 1 \dots, N$. En utilisant le fait que φ_i s'annule en dehors des intervalles I_{i-1} et I_i , (2.5.14) donne

$$\begin{aligned} \int_{I_{i-1} \cup I_i} u'_h(x) \varphi'_i(x) dx &= \int_{I_{i-1} \cup I_i} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, N \\ \Leftrightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'_h(x) \varphi'_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h(x) \varphi'_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

On peut de plus écrire

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i(x) \varphi_i(x) + \alpha \varphi_0(x) + \beta \varphi_{N+1}$$

où

$$\begin{cases} u_i = u_h(x_i) \\ \varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{a - x_1}, x \in [a, x_1] \\ \varphi_{N+1}(x) = \frac{x - x_N}{b - x_N}, x \in [x_N, b] \end{cases}$$

On insérant ces expressions dans (2.5.15), on obtient

$$\begin{aligned} u_1 \int_{x_0}^{x_1} \varphi'_1(x) \varphi'_1(x) dx + u_1 \int_{x_1}^{x_2} \varphi'_1(x) \varphi'_1(x) dx + u_1 \int_{x_1}^{x_2} \varphi'_1(x) \varphi'_2(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) \varphi_1(x) dx + \frac{\alpha}{x_1 - a} \\ u_1 \int_{x_1}^{x_2} \varphi'_1(x) \varphi'_2(x) dx + u_2 \int_{x_1}^{x_3} \varphi'_2(x) \varphi'_2(x) dx + u_3 \int_{x_2}^{x_3} \varphi'_2(x) \varphi'_3(x) dx &= \int_{x_1}^{x_3} f(x) \varphi_2(x) dx \\ u_{i-1} \int_{I_{i-1}} \varphi'_{i-1}(x) \varphi'_i(x) dx + u_i \int_{I_{i-1} \cup I_i} \varphi'_i(x) \varphi'_i(x) dx + u_{i+1} \int_{I_i} \varphi'_{i+1}(x) \varphi'_i(x) dx &= \int_{I_{i-1} \cup I_i} f(x) \varphi_i(x) dx, \\ u_{N-1} \int_{I_{N-1}} \varphi'_{N-1}(x) \varphi'_N(x) dx + u_N \int_{I_{N-1} \cup I_N} \varphi'_N(x) \varphi'_N(x) dx + u_{N+1} \int_{I_N} \varphi'_{N+1}(x) \varphi'_N(x) dx & \end{aligned}$$

$$= \int_{I_{N-1} \cup I_N} f(x) \varphi_N(x) dx + \frac{\beta}{b - x_N}$$

Dans le cas particulier où tous les intervalles ont la même longueur h , on a

$$\begin{cases} \varphi'_{i-1} = -\frac{1}{h} \text{ dans } I_{i-1} \\ \varphi'_i = \frac{1}{h} \text{ dans } I_{i-1} \\ \varphi'_i = -\frac{1}{h} \text{ dans } I_i \\ \varphi'_{i+1} = \frac{1}{h} \text{ dans } I_i \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} 2u_1 - u_2 &= h \int_{x_0}^{x_2} f(x) \varphi_1(x) dx + \frac{\alpha}{h} \\ -u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} &= h \int_{I_{i-1} \cup I_i} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 2, \dots, N-1 \\ -u_{N-1} + 2u_N &= h \int_{I_{N-1} \cup I_N} f(x) \varphi_N(x) dx + \frac{\beta}{h} \end{aligned}$$

on obtient le système linéaire

$$Au_h = hF$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x_2} f(x) \varphi_1(x) dx + \frac{\alpha}{h} \\ \int_{x_1}^{x_3} f(x) \varphi_2(x) dx \\ \int_{x_2}^{x_4} f(x) \varphi_3(x) dx \\ \vdots \\ \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x) \varphi_{N-1}(x) dx \\ \int_{x_{N-1}}^{x_{N+1}} \varphi_N(x) dx + \frac{\beta}{h} \end{pmatrix}$$

Le système linéaire obtenu a la même matrice que celle obtenue dans les différences finies mais le second membre ainsi que la solution sont différents.