

..

# Contents

<b>3</b>	<b>Techniques d'optimisation</b>	<b>3</b>
3.1	Introduction	3
3.2	Problèmes d'optimisation	3
3.2.1	Région admissible	4
3.3	Outils mathématiques	6
3.3.1	Formes quadratiques	6
3.3.2	Différentiabilité	7
3.3.3	Notions de convexité	8
3.3.4	Types d'extremum	10
3.3.5	Conditions nécessaires pour un minimum local	11
3.3.6	Classification des points stationnaires	14
3.4	Méthodes d'optimisation unidimensionnelles	17
3.4.1	Méthode de la section dorée	18
3.4.2	Interpolation parabolique (quadratique)	19
3.5	Méthodes d'optimisation multidimensionnelles	20
3.5.1	Méthodes de descente	21

# Chapter 3

## Techniques d'optimisation

### 3.1 Introduction

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble. L'optimisation intervient dans de nombreux domaines :

- En recherche opérationnelle (problème de transport, économie, gestion de stocks...).
- En analyse numérique (approximation/résolution de systèmes linéaires, non linéaires...).
- En automatique (modélisation de systèmes, filtrage...).
- En ingénierie (dimensionnement de structures, conception optimale de systèmes (réseaux, ordinateurs...)).
- Dans la théorie des jeux pour la recherche de stratégies.
- En théorie du contrôle et de la commande.

Beaucoup de systèmes susceptibles d'être décrits par un modèle mathématique sont optimisés. La qualité des résultats et des prédictions dépend de la pertinence du modèle, du bon choix des variables que l'on cherche à optimiser, de l'efficacité de l'algorithme et des moyens pour le traitement numérique.

### 3.2 Problèmes d'optimisation

L'optimisation est l'étude des problèmes qui s'expriment de la manière suivante.

#### Minimisation

**Definition 1** *Étant donné une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , trouver un élément  $\bar{x}$  de  $A$  tel que  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  pour tout  $x \in A$ . On dit que l'on cherche à minimiser la fonction  $f$  sur l'ensemble  $A$ .*

- La fonction  $f$  peut s'appeler : fonction coût (ou coût), fonction objectif (ou objectif), critère, etc.
- L'ensemble  $A$  est appelé ensemble admissible, et les points de  $A$  sont appelés les points admissibles du problème à optimiser.

- le point  $\bar{x}$  est appelé solution ou minimum ou minimiseur du problème.
- On dit que le problème est réalisable si l'ensemble  $A$  est non vide.

On peut écrire ce problème de différentes manières :

$$\begin{aligned} & \min_{x \in A} f(x) \\ & \min \{f(x) \mid x \in A\} \\ & \min f(A) \end{aligned}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in A \end{array} \right.$$

### Maximisation

Un problème de maximisation d'une fonction  $f$  est équivalent au problème de minimisation de  $-f$ . On peut le définir comme suit

$$f(x) \leq f(\bar{x}), \forall x \in A \Leftrightarrow -f(x) \geq -f(\bar{x})$$

L'équivalence veut dire ici que les solutions sont les mêmes et que les valeurs optimales sont opposées. En particulier, une méthode pour analyser et résoudre un problème de minimisation pourra être utilisée pour analyser et résoudre un problème de maximisation.

Certaines propriétés de  $f$  sont maintenues par passage de  $f$  en  $-f$  (continuité, différentiabilité ou linéarité), alors que d'autres, sont détruites par cette transformation, par exemple : minimiser  $f$  sur  $A$  avec  $f$  et  $A$  convexes, peut être considéré comme un problème facile, alors que : maximiser  $f$  sur  $A$  avec  $f$  et  $A$  convexes, est de fait un problème d'optimisation très difficile. La convexité est un exemple de propriété tournée davantage vers la minimisation que vers la maximisation.

### 3.2.1 Région admissible

N'importe quel point  $x$  satisfaisant les contraintes d'égalités et d'inégalités est dit point admissible du problème. L'ensemble de point satisfaisant ces contraintes est dit région admissible de  $f(x)$ . Ainsi la région admissible peut être définie par l'ensemble

$$A = \{x \mid a_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \text{ et } c_j(x), j = 1, \dots, q\}$$

N'importe quel point  $x$  qui n'appartient pas à  $A$  est dit point non admissible.

- Si les contraintes du problème à optimiser étaient toutes des inégalités, les contraintes se divisent en trois parties :
  1. Point intérieur est un point pour lequel  $c_j(x) > 0$  pour tout  $j$ . Ceci est un point admissible.
  2. Point au bord est un point pour lequel au moins un  $c_j(x) = 0$ . Ceci peut être ou ne pas être un point admissible.
  3. Point extérieurs est un point pour lequel au moins un  $c_j(x) < 0$ . Ceci est un point non admissible.
- Si une contrainte  $c_k(x)$  est nulle durant une itération spécifique, elle est dite active.

- Si  $c_k(\bar{x})$  est nulle la convergence est atteinte, l'optimum  $\bar{x}$  est localisé au bord. Dans ce cas là, le point optimal est dit contraint.

**Exemple 1** Résoudre en utilisant la méthode graphique le problème d'optimisation suivant :

$$\max f(X) = 3x + 2y$$

$$S.C: C_1(X) = 2x + y \leq 18$$

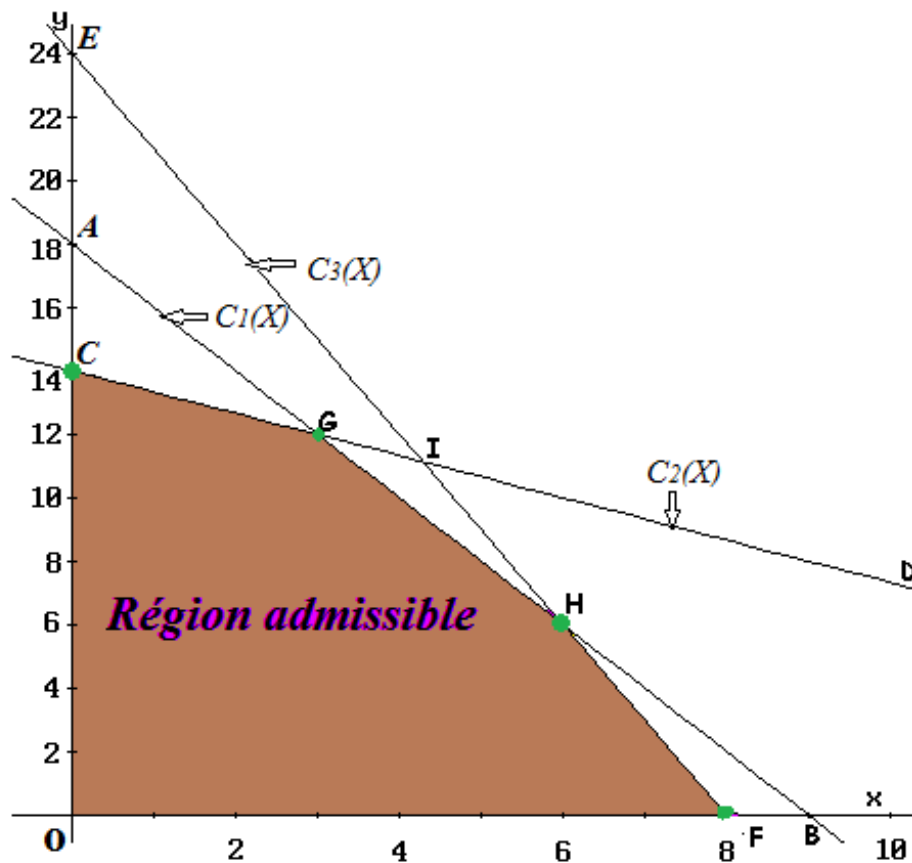
$$C_2(X) = 2x + 3y \leq 42$$

$$C_3(X) = 3x + y \leq 24$$

$$C_4(X) = x \geq 0$$

$$C_5(X) = y \geq 0$$

- On trace le système de coordonnées. On représente la variable 'x en abscisse et y en ordonnée, qu'on montre dans la figure (1).



- On représente les contraintes. On commence par la première, on trace la droite qu'on obtient si on considère la contrainte comme égale. Elle apparaît comme le segment qui met en relation A et B. On reproduit le processus avec les autres contraintes.
- La région réalisable est l'intersection des régions délimitées aussi par l'ensemble des contraintes, que par les conditions de non-négativité des variables, c'est-à-dire, par les deux axes de coordonnées. Cette région est représentée par le polygone O-F-H-G-C, en couleur marron.

- Finalement, on évalue la fonction objectif ( $3x + 2y$ ) dans chacun des points (résultat qu'on recueilli dans le tableau suivant). Comme le point **G** fournit la plus grande valeur à la fonction  $f(X)$  et l'objectif c'est de maximiser, ce point représente la solution optimale:  $f(X) = 33$  avec  $x = 3$  et  $y = 12$ .

Sommet	Coordonnées( $x, y$ )	$f(X)$
<b>O</b>	(0, 0)	0
<b>C</b>	(0, 14)	28
<b>G</b>	(3, 12)	33
<b>H</b>	(6, 6)	30
<b>F</b>	(8, 0)	24

## 3.3 Outils mathématiques

### 3.3.1 Formes quadratiques

**Definition 2** Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . La forme quadratique  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$$

**Definition 3** Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ . On dit que  $A$  est semi-définie positive (SDP) et on note  $A \geq 0$ , lorsqu'on a

$$x^T Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$A$  est définie positive (DP) et on note  $A > 0$ , lorsqu'on a

$$x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

On peut relier cette définition avec les valeurs propres de la matrice  $A$ .

**Proposition 1** Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$ . On note  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  ses valeurs propres (réelles). On a les équivalences suivantes :

$$A \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

$$A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$$

**Remark 1** Lorsque la matrice  $A$  est définie positive (resp. semi-définie positive), on dira que  $q(x)$  est une forme quadratique définie positive (resp. semi-définie positive).

### 3.3.2 Différentiabilité

**Definition 4** Soit une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  représentée dans la base canonique de  $\mathbb{R}^m$  par le vecteur

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

continue en  $a$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire, notée  $f'(a)$ , telle que pour tout  $d \in \mathbb{R}^n$  on ait

$$f(a + d) = f(a) + f'(a)d + \|d\| \epsilon(d)$$

où  $\epsilon$  est une fonction continue en 0 qui vérifie  $\lim_{d \rightarrow 0} \epsilon(d) = 0$  et  $\|d\| = (\sum_{k=1}^n d_k)^{\frac{1}{2}}$ . On appelle  $f'(a)$  la dérivée de  $f$  au point  $a$ .

**Proposition 2** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  différentiable en  $a$ . Alors

$$f'(a)d = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + td) - f(a)}{t}$$

Cette méthode d'estimation du gradient est souvent appelée différences finies qu'on a déjà vu dans le deuxième chapitre. La quantité  $f'(a)d$  est la dérivée directionnelle de  $f$  au point  $a$  dans la direction  $d$ .

La proposition suivante fait le lien entre la matrice de  $f'(a)$  et les dérivées partielles de  $f$  au point  $a$ .

#### 1. Calcul de la dérivée première :

**Proposition 3** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  différentiable en  $a$ . Alors on peut représenter la matrice de  $f'(a)$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et de  $\mathbb{R}^m$  et on a

$$(f'(a)_{ij}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

On appelle souvent  $f'(a)$  la matrice jacobienne de  $f$  au point  $a$ . Lorsque  $m = 1$  on adopte une notation et un nom particuliers :

le gradient est le vecteur noté  $\nabla f(a)$  et défini par

$$f'(a) = \nabla f(a)^T$$

On a alors

$$f(a + d) = f(a) + \nabla f(a)^T d + \|d\| \epsilon(d)$$

#### 2. Calcul de la dérivée seconde : Dans le cas $m = 1$ , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

**Definition 5** L'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite deux fois différentiable s'il existe une matrice symétrique  $\nabla^2 f(a)$  telle que

$$f(a + d) = f(a) + \nabla f(a)^T d + d^T \nabla^2 f(a) d + \|d\|^2 \epsilon(d)$$

On appelle  $\nabla^2 f(a)$  matrice hessienne de  $f$  au point  $a$ . Comme l'énonce le théorème suivant, cette matrice s'obtient à partir des dérivées secondes de  $f$  :

**Theorem 1** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois différentiable en un point  $a$ . Si on note  $g(x) = \nabla f(x)$ , alors la matrice hessienne est définie par  $\nabla^2 f(a) = g'(a)$ , soit

$$(\nabla^2 f(a)_{ij}) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

### 3.3.3 Notions de convexité

En mathématiques, le mot « convexe » est utilisé dans la désignation de deux notions bien distinctes :

- Lorsqu'il se rapporte à une forme géométrique, un ensemble de points, il renvoie au concept d'ensemble convexe .
- Lorsqu'il se rapporte à une fonction, il renvoie au concept de fonction convexe.

En économie, la convexité est un indicateur de risque de taux directement lié au concept mathématique de fonction convexe.

Un objet géométrique est dit convexe lorsque, chaque fois qu'on y prend deux points  $x$  et  $y$ , le segment  $[x,y]$  qui les joint y est entièrement contenu. Ainsi un cube plein, un disque ou une boule sont convexes (voir figure 3.1), mais un objet creux ou bosselé ne l'est pas (voir figure 3.2).

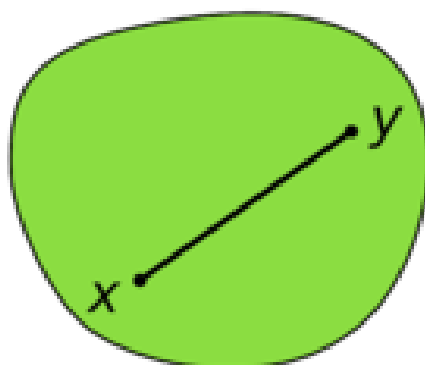


Fig. 3.1: ensemble convexe

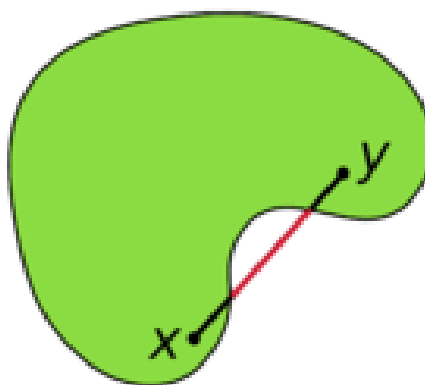


Fig. 3.2: ensemble non convexe

#### Ensemble convexe

**Definition 6** Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Le segment de droite rejoignant l'extrémité de ces vecteurs, l'ensemble des points :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

**Exemple 2** Considérons les deux vecteurs  $x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .  
Soit  $[S_1, S_2]$  le segment de droite reliant les extrémités de  $x_1$  et  $x_2$ .

$$[S_1, S_2] = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 / x = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}$$

En faisant varier la valeur de  $\alpha$  entre 0 et 1, on obtient les points de segment:

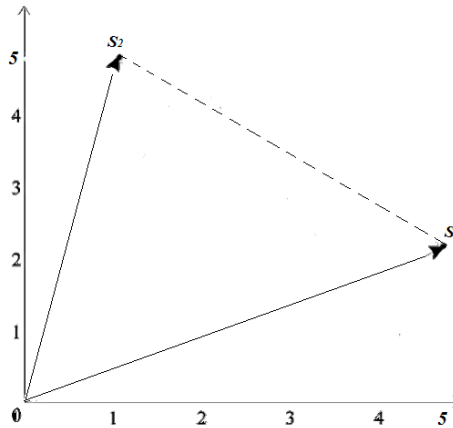
$$\alpha = 0 \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = S_2$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad x = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \quad x = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 1 \quad x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = S_1$$



### Fonction convexe

**Definition 7** Soit  $S$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est dite convexe sur  $s$  si:

$$\forall (x, y) \in S^2, \forall \alpha \in [0, 1], f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

On dit que  $f$  est strictement convexe sur  $S$  si pour  $x \neq y$ :

$$\forall (x, y) \in S^2, \forall \alpha \in [0, 1], f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

## Caractérisation de la convexité en terme de hessien

**Proposition 4** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois continûment dérivable sur un ensemble  $S$  convexe, alors  $f$  est convexe si et seulement si  $f''(x) \geq 0, \forall x \in S$  et  $f$  est strictement convexe si et seulement si  $f''(x) > 0, \forall x \in S$

Ce résultat se généralise pour  $n > 1$ : le résultat suivant fait le lien entre le hessien et la propriété de convexité.

**Theorem 2** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois continûment dérivable sur un ensemble  $S$  convexe, alors  $f$  est convexe si et seulement si  $\nabla^2 f(x) \geq 0, \forall x \in S$  et  $f$  est strictement convexe si et seulement si  $\nabla^2 f(x) > 0, \forall x \in S$

**Corollary 1** Soit  $f$  une forme quadratique définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx - b^T x$$

Alors  $f$  est convexe si et seulement si  $H \geq 0$ , et strictement convexe si et seulement si  $H > 0$ .

Cela provient du fait que  $\nabla^2 f(x) = H$ .

Dans le cas où la fonction  $f$  n'est supposée qu'une fois différentiable, on a le résultat suivant :

**Theorem 3** Si  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction une fois différentiable, alors  $f$  est convexe si et seulement si

$$f(y) \geq f(x) + \nabla^T f(x)(y - x), \forall (x, y) \in S^2$$

La fonction  $f$  est strictement convexe si et seulement si

$$f(y) > f(x) + \nabla^T f(x)(y - x), \forall (x, y) \in S^2$$

### 3.3.4 Types d'extremum

**Definition 8** Un point  $\bar{x} \in A$  est dit un minimiseur local de  $f(x)$  s'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que

$$f(\bar{x}) \leq f(x)$$

si

$$x \in A \text{ et } \|x - \bar{x}\| < \epsilon$$

**Definition 9** Un point  $\bar{x} \in A$  est dit un minimiseur global de  $f(x)$  tel que  $\forall x \in A$

$$f(\bar{x}) \leq f(x)$$

Un minimiseur global est un minimiseur local.

**Example 3** Soit  $f(x) = x^2 + y^2 + xy + 1$

1. Déterminer les points critiques de  $f$ .
2. Étudier les extremums locaux de  $f$ .

## Solution

1. On calcule les dérivées partielles de  $f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y$$

Si  $(x, y)$  est un point critique de  $f$ , il vérifie donc le système

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$  est donc le seul point critique de  $f$ .

2. Les extremums locaux d'une fonction différentiable ne pouvant être atteints qu'en un point critique, il suffit d'étudier si  $(0, 0)$  est un extremum local. En faisant un développement carré de  $f$  on obtient :

$$f(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 \geq 1 = f(0, 0)$$

Ainsi,  $(0, 0)$  est minimum local et même global de  $f$ .

### 3.3.5 Conditions nécessaires pour un minimum local

Le gradient  $g(x)$  et le Hessien  $H(x)$  doivent satisfaire certaines conditions en  $\bar{x}$  (minimiseur local). Deux conditions vont être présentées :

1. Conditions qui vont être satisfaites en  $\bar{x}$ . Ce sont des conditions nécessaires.
2. Conditions qui vont garantir que  $\bar{x}$  est un minimiseur local. Ce sont des conditions suffisantes.

#### La direction

**Definition 10** Soit  $\delta = \alpha d$  une variation de  $x$  où  $\alpha > 0$  et  $d$  le vecteur direction. Si  $A$  est la région admissible et une constante  $\tilde{\alpha}$  existe telle que

$$x + \alpha d \in A$$

pour tout  $\alpha$  avec  $0 \leq \alpha \leq \tilde{\alpha}$ , alors  $d$  est dite direction admissible au point  $x$ .

**Example 4** La région admissible d'un problème d'optimisation est donnée par :

$$A = \{x/x_1 \geq 2, x_2 \geq 0\}$$

Lequel des vecteurs  $d_1 = (-2 \ 2)^T$ ,  $d_2 = (0 \ 2)^T$ ,  $d_3 = (2 \ 0)^T$  est une direction admissible aux points  $x_1 = (4 \ 1)^T$ ,  $x_2 = (2 \ 3)^T$  et  $x_3 = (1 \ 4)^T$  ?

#### Solution

D'après la figure (3.3), on les résultats suivants :

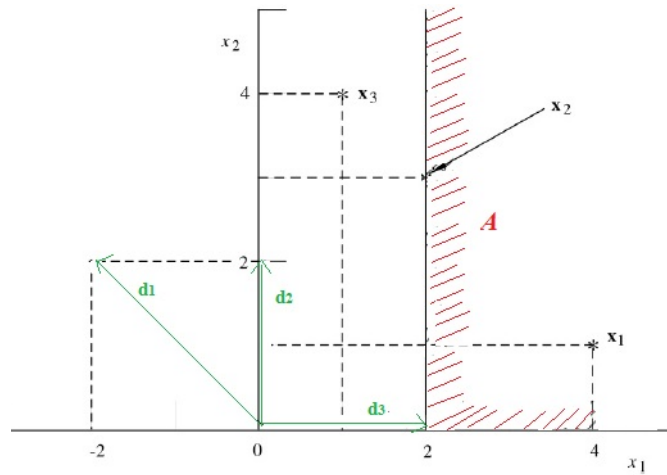


Fig. 3.3: les vecteurs direction

- $d_1$  est une direction admissible au point  $x_1$  pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$ . car on a

$$x_1 + \alpha d_1 \in A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2\alpha \geq 2 \\ 1 + 2\alpha \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq 1 \\ \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- $d_1$  n'est pas une direction admissible au point  $x_2$ .
- $d_2$  est une direction admissible aux points  $x_1$  et  $x_2$  pour un  $\tilde{\alpha} > 0$ .
- $d_3$  est une direction admissible aux points  $x_1$  et  $x_2$  pour un  $\tilde{\alpha} > 0$ .
- $d_1, d_2$  et  $d_3$  ne sont pas des directions admissibles au point  $x_3$ , car  $x_3$  n'appartient pas à la région admissible.

### Conditions nécessaires du premier ordre

La fonction objectif doit satisfaire deux types de conditions dans le but d'avoir un minimum, dites, conditions du premier et du second ordre. Les conditions du premier ordre utilisent le gradient.

**Theorem 4** 1. Si  $f(x) \in C^1$  et  $\bar{x}$  un minimiseur local, alors

$$g(\bar{x})^T d \geq 0$$

pour toute direction admissible  $d$  au point  $\bar{x}$ .

2. Si  $\bar{x}$  est localisé à l'intérieur de  $A$ , alors

$$g(\bar{x}) = 0$$

## Conditions nécessaires du second ordre

Les conditions nécessaires du second ordre utilisent non seulement le gradient mais aussi le Hessien. Soit  $d$  est une direction arbitraire au point  $x$ . Rappelons que, la forme quadratique  $d^T H(x)d$  est dite D.P, si  $d^T H(x)d > 0$  S.D.P, si  $d^T H(x)d \geq 0$ , S.D.N si  $d^T H(x)d \leq 0$  et D.N si  $d^T H(x)d < 0$ , pour tout  $d \neq 0$  au point  $x$ . Si  $d^T H(x)d$  admet des valeurs positives et négatives est dite indéfinie.

**Theorem 5** • Si  $f(x) \in C^2$  et  $\bar{x}$  un minimiseur local, alors pour toute direction admissible  $d$  au point  $\bar{x}$

1.  $g(\bar{x})^T d \geq 0$
2. Si  $g(\bar{x})^T d = 0, d^T H(\bar{x})d \geq 0$

• Si  $\bar{x}$  est localisé à l'intérieur de  $A$ , alors

1. 
$$g(\bar{x}) = 0$$
2.  $d^T H(\bar{x})d \geq 0, \forall d \neq 0.$

**Example 5** Soit  $\bar{x} = (\frac{1}{2} \ 0)^T$  un minimiseur local du problème

$$\begin{aligned} \min f(X) &= x^2 - x + y + xy \\ S.C : x &\geq 2, y \geq 0 \end{aligned}$$

Montrer que les conditions nécessaires du second ordre sont vérifiées.

### solution

Les dérivées partielles premières de  $f$  sont:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 1$$

Si  $d = (d_1 \ d_2)^T$  est une direction admissible, on obtient

$$g(x)^T d = (2x + y - 1)d_1 + (x + 1)d_2$$

au point  $x = \bar{x}$

$$g(\bar{x})^T d = \frac{3}{2}d_2$$

Si  $d_2 \geq 0$ , on a

$$g(\bar{x})^T d \geq 0$$

Alors les conditions nécessaires du premier ordre sont vérifiées.

Si  $d_2 = 0$

$$g(\bar{x})^T d = 0$$

le hessien est

$$H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

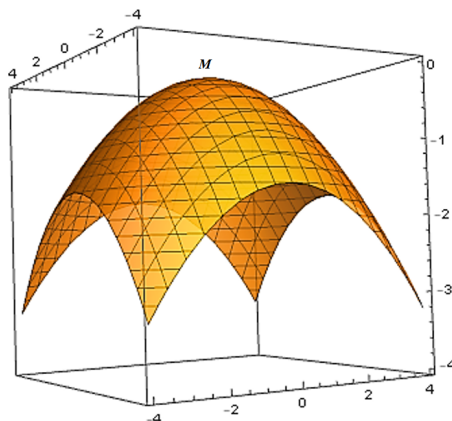
$$d^T H(\bar{x})d = 2d_1^2 \geq 0$$

pour toute valeur de  $d_1$ , les conditions nécessaires du second ordre sont vérifiées.

### 3.3.6 Classification des points stationnaires

Si les points extremums appelés minimiseurs et maximiseurs, sont localisés à l'intérieur de la région admissible, ils sont appelés points stationnaires lorsque  $g(x) = 0$  en ces points. Un autre type de points stationnaires est le point selle ou point col.

Dans le cas d'une fonction à deux variables  $z = f(x, y)$ , le graphe est une surface dans l'espace à trois dimensions. Une telle fonction présente un maximum au point  $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  si  $f(x_0, y_0)$  atteint une valeur supérieure à toutes celles que prend  $f(x, y)$  au voisinage de  $x = x_0$  et  $y = y_0$ .



De même,  $f(x, y)$  possède un minimum au point  $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  si  $f(x_0, y_0)$  atteint une valeur inférieure à toutes celles que prend  $f(x, y)$  au voisinage de  $x = x_0$  et  $y = y_0$ .

Il en résulte qu'au point  $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , il existe un plan tangent horizontal. Ce plan tangent est engendré par deux tangentes, elles-mêmes déterminées par :

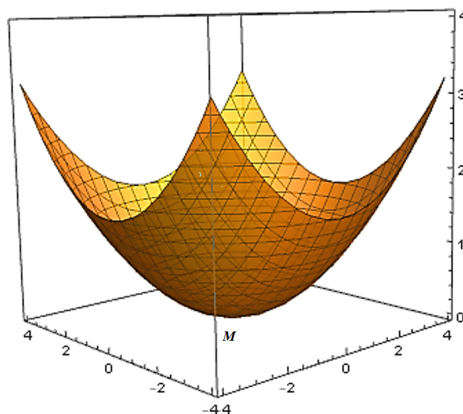
$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ainsi, la condition nécessaire à l'existence d'un extremum est la suivante

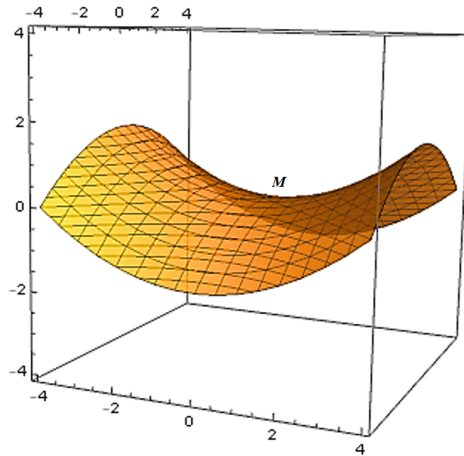
$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0, 0)$$

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. En effet, il existe des fonctions pour lesquelles  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  sans qu'il existe un extremum en ce point. Dans ce cas, on parle de point-selle.

Il est toujours possible de trouver un point situé au-dessus du point-selle et un autre



au-dessous, ceci quelque soit le voisinage du point-selle considéré. Notons encore, qu'en un point-selle la fonction présente un minimum pour l'une des variables et un maximum pour l'autre variable.



Il faut donc remplir une condition suffisante qui est la suivante :

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$$

Ainsi on obtient le résultat suivant :

**Résultat :**

Soit  $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  le point en lequel:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

Alors, si on ce point

1.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$  et  $D > 0$ ,  $f$  possède un minimum au point  $M$ .
2.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$  et  $D > 0$ ,  $f$  possède un maximum au point  $M$ .
3. Si  $D < 0$ ,  $f$  possède ni un minimum ni un maximum au point  $M$ , mais un point-selle.
4. Si  $D = 0$ , on ne peut rien conclure.

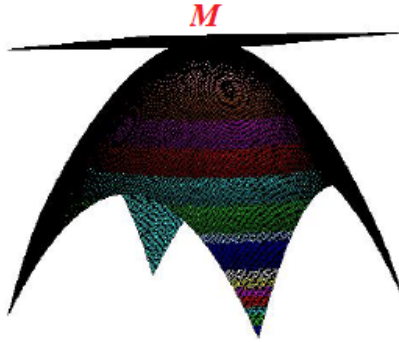
**Exemple 6** Soit la fonction  $f(x, y) = -x^2 - y^2$  et son plan tangent d'équation  $z = x + y$ . Résolvant le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc, il existe un point stationnaire qui  $M = (0, 0, 0)$ . Pour connaître la nature de ce point, il suffit d'appliquer le résultat précédent. On trouve alors:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0 \text{ et } D = 4 > 0$$

Donc,  $M = (0, 0, 0)$  est un maximum comme le montre la figure suivante



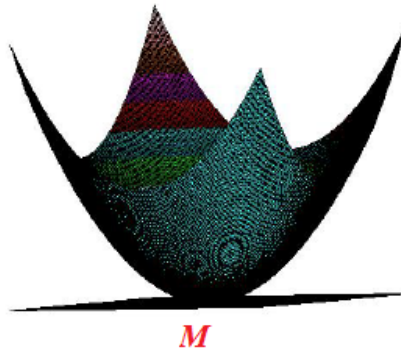
**Exemple 7** Soit la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2$  et son plan tangent d'équation  $z = x + y$ . Résolvant le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc, il existe un point stationnaire qui  $M = (0, 0, 0)$ . Pour connaître la nature de ce point, il suffit d'appliquer le résultat précédent. On trouve alors:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0 \text{ et } D = 4 > 0$$

Donc,  $M = (0, 0, 0)$  est un minimum comme le montre la figure suivante



**Exemple 8** Soit la fonction  $f(x, y) = -x^2 + y^2$  et son plan tangent d'équation  $z = x + y$ . Résolvant le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc, il existe un point stationnaire qui  $M = (0, 0, 0)$ . Pour connaître la nature de ce point, il suffit d'appliquer le résultat précédent. On trouve alors:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0 \text{ et } D = -4 < 0$$

Donc,  $M = (0,0,0)$  n'est ni un maximum ni un minimum, c'est un point-selle comme le montre la figure suivante



### 3.4 Méthodes d'optimisation unidimensionnelles

Les méthodes unidimensionnelles sont utilisées dans l'optimisation de fonctions à une seule variable. Elles peuvent être classées en deux groupes :

#### 1. Les méthodes de subdivision d'intervalles :

Elles consistent à se rapprocher de l'optimum par réductions successives de l'intervalle de recherche complet, en tenant compte de la valeur de la fonction aux extrémités de chaque sous-intervalle exploré séquentiellement.

- La méthode la plus simple de dichotomie classique utilise un facteur de réduction constant de  $\frac{1}{2}$ .
- Dans la méthode de Fibonacci, le facteur de réduction est adapté au cours de la recherche : il est défini comme le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci (ce facteur tend vers le nombre d'or égal à  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ). L'intérêt de la méthode réside dans le fait qu'à chaque itération, la valeur de la fonction est évaluée en un seul point pour la détermination de l'intervalle suivant. L'autre extrémité du nouvel intervalle de recherche est déduit des points testés lors des itérations précédentes
- La section dorée ou méthode du nombre d'or est très similaire à la méthode de Fibonacci. Elle utilise un facteur de réduction égal au nombre d'or.

Les techniques de subdivision d'intervalles peuvent s'appliquer à des fonctions éventuellement discontinues. Elles nécessitent que ces dernières soient unimodales. Dans le cas contraire, elles ne garantissent pas la convergence vers l'optimum global. Par ailleurs, l'optimum ne peut être localisé "exactement". Il est seulement possible d'obtenir sa valeur dans un certain intervalle d'incertitude (l'intervalle obtenu à la dernière itération à la suite des subdivisions successives). La précision de la recherche est fonction de l'intervalle de départ et du nombre d'itérations. Elle peut être améliorée en augmentant le nombre de subdivisions.

## 2. Les méthodes d'interpolation :

- Les méthodes Lagrangiennes s'efforcent de se rapprocher de l'optimum par réductions successives de l'intervalle de recherche, en interpolant la fonction par un polynôme d'ordre  $n$ .
- La technique d'interpolation quadratique (parabolique) de la fonction par un polynôme d'ordre 2 est la plus populaire.

Dans cette section on s'intéresse à la méthode de la section dorée et la méthode d'interpolation parabolique.

### 3.4.1 Méthode de la section dorée

Un problème d'optimisation unidimensionnel est défini par

$$\min F = f(x)$$

où  $f(x)$  est une fonction à une seule variable. Ce problème a une solution si  $f(x)$  possède un seul minimum dans un intervalle considéré  $[a, b]$ , où  $a$  et  $b$  sont les limites inférieure et supérieure respectivement du minimiseur  $\bar{x}$ .

Dans les méthodes de Recherche Linéaire,  $\bar{x}$  appartient à un intervalle  $[a, b]$  appelé intervalle d'incertitude, le but est de réduire d'une manière itérative l'intervalle jusqu'à obtenir le plus petit intervalle  $[a_n, b_n]$  qui contient  $\bar{x}$ .

**Definition 11** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . On dit que  $f$  est unimodale s'il existe un  $x_* \in ]a, b[$  tel que  $f$  soit strictement décroissante sur  $[a, x_*]$  et strictement croissante sur  $[x_*, b]$ . On a donc un minimum local strict en  $x_*$  (c'est même l'unique minimum global sur  $[a, b]$ ).

**Definition 12** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , et trois réels  $a < c < b$  de  $I$ . On dit que le triplet  $(a, c, b)$  est admissible pour le problème de minimisation de  $f$  si on a  $f(a) \geq f(c)$  et  $f(b) \geq f(c)$ .

Si  $f(a) = f(c)$  ou  $f(b) = f(c)$  alors là le minimum il est dans  $a$  ou dans  $b$ .

### Objectif de la méthode

La méthode de la section dorée consiste à s'arranger pour que la taille du triplet soit divisée d'un facteur constant à chaque étape. On s'aperçoit alors que cela contraint ce facteur à être  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

On se donne une fonction  $f$  continue sur l'intervalle  $[a_0, b_0]$ . On pose

$$\alpha = \frac{1}{\varphi}$$

$$c_0 = a_0 + (1 - \alpha)(b_0 - a_0)$$

et

$$d_0 = a_0 + \alpha(b_0 - a_0)$$

On calcul  $f(a_0), f(b_0), f(c_0)$  et  $f(d_0)$  et on suppose qu'un des triplets  $(a_0, c_0, b_0)$  ou  $(a_0, d_0, b_0)$  est admissible. On définit les suites par récurrence :

- Si  $f(c_n) < f(d_n)$ , alors le triplet  $(a_n, c_n, d_n)$  est admissible et on pose

$$(a_{n+1}, d_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n, d_n)$$

et

$$c_{n+1} = a_{n+1} + (1 - \alpha)(b_{n+1} - a_{n+1})$$

On a simplement besoin de calculer  $f(c_{n+1})$ , puisque  $f(a_{n+1})$ ,  $f(d_{n+1})$  et  $f(b_{n+1})$  sont déjà connues. Si  $f(c_n) \geq f(d_n)$ , alors le triplet  $(c_n, d_n, b_n)$  est admissible et on pose

$$(a_{n+1}, d_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, d_n, b_n)$$

et

$$d_{n+1} = a_{n+1} + \alpha(b_{n+1} - a_{n+1})$$

On a simplement besoin de calculer  $f(d_{n+1})$ , puisque  $f(a_{n+1})$ ,  $f(c_{n+1})$  et  $f(b_{n+1})$  sont déjà connues.

### Algorithme

```

    poser  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 
    poser  $a_0 = a$ 
    poser  $b_0 = b$ 
    pour  $i = 0, \dots, N_{max}$ 
    poser  $c' = a_i + \frac{1}{\varphi^2}(b_i - a_i)$ 
    poser  $d' = a_i + \frac{1}{\varphi}(b_i - a_i)$ 
    Si  $(f(c') < f(d'))$  alors
    poser  $a_{i+1} = a_i$ 
    poser  $b_{i+1} = d'$ 
    Sinon si  $(f(c') > f(d'))$  alors
    poser  $a_{i+1} = c'$ 
    poser  $b_{i+1} = b_i$ 
    Sinon si  $(f(c') = f(d'))$  alors
    poser  $a_{i+1} = c'$ 
    poser  $b_{i+1} = d'$ 
    fin pour si
    fin pour  $i$ 

```

Ici, le  $N_{max}$  est le nombre maximal d'itérations que l'on se fixe. A cette fin, on doit valider un critère d'arrêt de la forme :  $|b_{i+1} - a_{i+1}| < \epsilon$ , où  $\epsilon$  est l'erreur (ou tolérance) que l'on se permet sur la solution  $\bar{x}$  du problème.

### 3.4.2 Interpolation parabolique (quadratique)

La méthode d'interpolation quadratique consiste à approximer l'expression de la fonction objectif par un polynôme du second ordre

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

où  $a_0$ ,  $b_0$  et  $c_0$  sont des constantes. Soit

$$p(x_i) = f(x_i) = f_i \tag{3.4.1}$$

pour  $i = 1, 2, 3$  où  $[x_1, x_3]$  est l'intervalle qui contient le minimiseur de  $f(x)$ .  
 Considérons que les valeurs de  $f_i$  sont connues, ainsi  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  peuvent être déduite par la solution du système (3.4.1).

### Interpolation en un point

La première dérivée de  $p(x)$  est donnée par :

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x$$

Si  $p'(x) = 0$  et  $a_2 \neq 0$  alors le minimiseur de  $p(x)$  est déduit par

$$x_* = \frac{-a_1}{2a_2}$$

En résolvant simultanément les équations du système (3.4.1), on trouve

$$a_1 = -\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

$$a_2 = \frac{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

Ainsi

$$x_* = -\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{2[(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3]}$$

Si  $p(x)$  est une bonne approximation de  $f(x)$ , alors  $x_*$  sera une bonne estimée de  $\bar{x}$ .

### Interpolation en deux points

Ici, on considère que les valeurs de  $f(x)$  et de ces premières dérivées sont connues en deux points distincts. On peut écrire :

$$p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f(x_1) = f_1$$

$$p(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = f(x_2) = f_2$$

$$p'(x_1) = a_1 + 2a_2x_1 = f'_1$$

La solution de ces équations donne

$$a_1 = f'_1 - \frac{2x_1[f'_1(x_1 - x_2) - (f_1 - f_2)]}{(x_1 - x_2)^2}$$

$$a_2 = \frac{f'_1(x_1 - x_2) - (f_1 - f_2)}{(x_1 - x_2)^2}$$

d'où

$$x_* = x_1 + \frac{f'_1(x_2 - x_1)^2}{2[f_1 - f_2 + f'_1(x_2 - x_1)]}$$

Maintenant si la dérivée est connue en deux points  $x_1$  et  $x_2$  alors

$$x_* = x_2 + \frac{f'_2(x_2 - x_1)}{f'_2 - f'_1}$$

## 3.5 Méthodes d'optimisation multidimensionnelles

Les méthodes multidimensionnelles sont consacrées à l'optimisation de fonction à un paramètre ou plus. On peut les classer de la manière suivante :

- Elles sont dites d'ordre 0, si elles n'utilisent que la valeur de la fonction. Ces méthodes ont pour avantage de se passer du calcul du gradient surtout lorsque la fonction n'est pas différentiable ou lorsque le calcul de son gradient est complexe ou représente un coût important. Leur inconvénient est qu'elles sont peu précises et convergent très lentement vers l'optimum.
- Elles sont dites d'ordre 1, si elles nécessitent en plus le gradient de la fonction. Elles ont pour avantage d'accélérer la localisation de l'optimum, car le gradient donne une information sur la direction de recherche de la solution par contre, elles ne sont applicables qu'aux problèmes dans lesquels la fonction est continûment différentiable.
- Elles sont dites d'ordre 2, si elles utilisent le gradient et le hessien de la fonction.

Les méthodes multidimensionnelles peuvent être divisées en deux groupes :

- **les méthodes analytiques ou de descente** : se basent sur la connaissance d'une direction de recherche, souvent donnée par le gradient de la fonction. Comme exemple il y a les méthodes de descente : gradient à pas fixe ou à pas optimal, la méthode du Gradient Conjugué et les méthodes Newton et Quasi-Newton.
- **Les méthodes heuristiques (géométriques)** : elles explorent l'espace par essais successifs en recherchant les directions les plus favorables. On emploie le plus souvent la stratégie de Hooke et Jeeves, la méthode de Rosenbrock, ou la méthode du simplexe de Nelder et Mead. Toutes ces techniques sont déterministes et locales mais elles sont beaucoup plus robustes que les méthodes analytiques classiques, en particulier si la fonction objectif est discontinue ou bruitée. Par contre, elles deviennent contre indiquées lorsque le nombre de paramètres est élevé.

### 3.5.1 Méthodes de descente

Dans cette section, on va s'intéresser aux algorithmes de calcul de minimum et plus particulièrement aux algorithmes de descente. Partant d'un point  $x_0$  arbitrairement choisi, un algorithme de descente va chercher à générer une suite d'itérés  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$$

**Definition 13** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d \in \mathbb{R}^n$ . La dérivée directionnelle en  $x$  dans la direction de  $d$  est définie par

$$df(x; d) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}$$

si cette limite existe.

**Proposition 5** Si  $f$  est différentiable en un point  $x \in \mathbb{R}^n$  alors pour tout  $d \neq 0$ ,  $f$  admet une dérivée dans la direction  $d$  en  $x$  et

$$df(x; d) = Df(x)(d) = \nabla f(x)^T d$$

La dérivée directionnelle donne des informations sur la pente de la fonction dans la direction  $d$ , tout comme la dérivée donne des informations sur la pente des fonctions à une variable. En particulier,

- Si  $df(x; d) > 0$ , alors  $f$  est croissante dans la direction  $d$ .
- Si  $df(x; d) < 0$ , alors  $f$  est décroissante dans la direction  $d$ .

Dans ce dernier cas, on dira que  $d$  est une direction de descente de  $f$ .

### Direction de descente

**Definition 14** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d \in \mathbb{R}^n$ . Le vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  est une direction de descente pour  $f$  à partir du point  $x$  si  $t \rightarrow f(x + td)$  est décroissante en  $t = 0$ , c'est-à-dire il existe un  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall 0 < t < \alpha, f(x + td) < f(x)$$

$$df(x; d) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}$$

si cette limite existe.

Parmi toutes les directions de descente existantes en un point  $x$  donné, il est naturel de s'intéresser à celle où la pente est la plus forte. Un résultat remarquable montre que cette direction est donnée par l'opposé du gradient.

**Proposition 6** Soit  $f$  une fonction différentiable en un point  $x \in \mathbb{R}^n$  alors pour toute direction  $d \neq 0$  de norme constante égale à  $\|d\| = \|\nabla f(x)\|$ , on a

$$(-\nabla f(x))^T \nabla f(x) \leq d^T \nabla f(x)$$

### Algorithme général pour les méthodes de descente

Données :  $f$  supposé au moins différentiable,  $x_0$  point initial arbitrairement choisi. Sortie : une approximation de la solution du problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

1.  $k = 0$
2. tant que le test de convergence n'est pas satisfait
  - Trouver une direction de descente  $d_k$  telle que

$$\nabla f(x_k)^T d_k < 0$$

- Choisir un pas  $\alpha_k > 0$  à faire dans la direction  $d_k$  tel que:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k)$$

- On pose  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ ;  $k = k + 1$
3. Retourner  $x_k$

## Tests d'arrêts

Soit  $\bar{x}$  un point de minimum local du critère  $f$  à optimiser. En pratique, un test d'arrêt devra être choisi pour garantir que l'algorithme s'arrête toujours après un nombre fini d'itérations et que le dernier point calculé soit suffisamment proche de  $\bar{x}$ . Soit  $\epsilon > 0$  la précision demandée. Plusieurs critères sont à notre disposition : tout d'abord un critère d'optimalité basé sur les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre : on teste si

$$\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$$

auquel l'algorithme s'arrête et fournit l'itéré courant  $x_k$  comme solution.

En pratique, le test d'optimalité n'est pas toujours satisfait et on devra faire appel à d'autres critères comme :

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\| &< \epsilon \|x_k\| \\ |f(x_{k+1}) - f(x_k)| &< \epsilon |x_k|\end{aligned}$$

ou fixé le seuil du nombre minimal d'itération à l'avance ( $k < k_{\max}$ ).

## La convergence

Il est important de garantir la convergence d'un algorithme sous certaines hypothèses. Étudier la convergence d'un algorithme, c'est étudier la convergence de la suite des itérés générés par l'algorithme.

**Definition 15** Soit un algorithme itératif qui génère une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}^n$  afin de résoudre le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une application de classe  $C^1$ . L'algorithme est dit globalement convergent si quel que soit le point initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$$

Cette propriété garantit que le critère d'arrêt  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$  sera satisfait à partir d'un certain rang quelle que soit la précision  $\epsilon > 0$  demandée.

## Méthode du gradient

La méthode du gradient fait partie des classes de méthodes dites de descente. Soit  $x_k \in \mathbb{R}^n$  l'itéré courant. Étant donné la valeur  $f(x_k)$  et le gradient  $\nabla f(x_k)$ , on remplace  $f$  au voisinage de  $x_k$  par son développement de Taylor au premier ordre :

$$f(x_k + d) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^T d$$

On voudrait que la dérivée directionnelle  $\nabla f(x_k)^T d$  soit la plus petite possible dans un voisinage de  $d = 0$ . On cherche donc à résoudre :

$$\min_{d \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_k)^T d, \quad S.C \|d\| = \|\nabla f(x_k)\|$$

dont la solution nous est donné par

$$d_k = -\nabla f(x_k)$$

Le choix de la direction de plus forte descente définit une famille d'algorithmes appelés algorithmes de descente de gradient dont le schéma est le suivant :

Données :  $f$ ,  $x_0$  première approximation de la solution cherchée,  $\epsilon > 0$  précision demandée. Sortie : une approximation  $x_*$  de la solution du problème  $\nabla f(x) = 0$

1.  $k = 0$
2. tant que le test de convergence n'est pas satisfait
  - Trouver une direction de descente  $d_k$  telle que

$$d_k = -\nabla f(x_k)$$

- Choisir un pas  $\alpha_k > 0$  à faire dans la direction  $d_k$  tel que:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k)$$

- On pose  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ ;  $k = k + 1$

3. Retourner  $x_k$

Il reste maintenant à définir une stratégie de calcul du pas. Nous étudions ici en première approche une méthode à pas optimal, puis une à pas fixe.

### 1. Gradient à pas optimal:

Une idée naturelle consiste à suivre la direction de plus forte descente et à faire un pas qui rende la fonction à minimiser la plus petite possible dans cette direction. Cette méthode est appelée méthode de gradient à pas optimal ou encore méthode de plus forte pente.

On remplace dans l'algorithme de descente du gradient l'étape : Trouver une direction de descente  $d_k$  telle que  $d_k = -\nabla f(x_k)$ , par Calculer un pas optimal  $\alpha_k$  solution de :

$$\min_{\alpha > 0} f(x_k + \alpha d_k)$$

la résolution du problème de minimisation unidimensionnel de cette étape, même de façon approchée, coûte cher en temps de calcul. Pour ces raisons, on peut lui préférer parfois l'algorithme de gradient à pas constant (ou à pas fixe).

### 2. Gradient à pas fixe:

L'idée est très simple : on impose une fois pour toutes, la taille du pas effectué selon la direction de descente calculée à chaque itération. Les étapes : Choisir un pas  $\alpha_k > 0$  à faire dans la direction  $d_k$  tel que:  $f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k)$  et  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ ;  $k = k + 1$  de l'algorithme de descente de gradient sont alors remplacées par :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

### 3. Méthode de la plus forte pente avec Hessien:

Si le Hessien de  $f$  existe et peut être calculé, la valeur  $\alpha$  qui minimise  $f(x_k + \alpha d_k)$  peut être déterminée en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 2 et en posant  $\nabla f(x_k) = g_k$ , on obtient

$$f(x_k + \alpha d_k) \approx g_k + (\alpha d_k)^T g_k + \frac{1}{2} (\alpha d_k)^T H(x_k) (\alpha d_k)$$

et si  $d_k$  est la direction de la plus forte pente c'est-à-dire:  $d_k = -g_k$ , on obtient

$$f(x_k - \alpha g_k) \approx g_k - \alpha g_k^T g_k + \frac{1}{2} \alpha^2 g_k^T H(x_k) g_k$$

En dérivant par rapport à  $\alpha$ , on obtient

$$\frac{df(x_k + \alpha d_k)}{d\alpha} \approx -g_k^T g_k + \alpha g_k^T H(x_k) g_k$$

En posant ce résultat égal à zéro, on obtient

$$\alpha = \alpha_k \approx \frac{g_k^T g_k}{g_k^T H(x_k) g_k}$$

Alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g_k^T g_k}{g_k^T H(x_k) g_k} g_k$$

## Méthode du gradient conjugué

### 1. Méthode du gradient conjugué linéaire:

Soit  $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b x$  avec  $A$  une matrice symétrique définie positive. On sait alors qu'il existe un unique minimum sur  $\mathbb{R}^n$  donné par  $x_* = A^{-1}b$ . Dans la suite, on note  $r(x) = Ax - b = \nabla f(x)$  le résidu.

**Definition 16** Les vecteurs non nuls  $\{d_1, \dots, d_p\}$  sont dits conjugués par rapport à la matrice  $A$  si

$$\text{pour tout } i \neq j \in \{1, \dots, p\}, d_i^T A d_j = 0$$

**Lemma 1** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique définie positive,  $k \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{F} = \{d_i\}_{1 \leq i \leq k}$  une famille de vecteurs  $A$ -conjuguée. alors

$$\begin{cases} \mathcal{F} \text{ une famille libre si } k \leq n \\ \text{Si } k = n, \mathcal{F} \text{ est une base} \end{cases}$$

**Definition 17** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique définie positive et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . La méthode du gradient conjugué linéaire consiste à construire une famille de directions de descente  $A$ -conjuguées pour résoudre le système linéaire  $Ax - b = 0$  en minimisant la forme quadratique

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b x$$

### Principe de La méthode:

Le but est de construire une suite d'itérés  $(x^{(k)})$  qui converge vers la solution du problème d'optimisation

$$\min q(x)$$

avec  $q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - bx, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique définie positive et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

Notons que la suite  $x^{(k)}$  est définie par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)}d^{(k)}$$

$\alpha^{(k)}$  est une suite de pas qui pour chaque itéré  $k$

$$\alpha^{(k)} = \frac{r^{(k)}d^{(k)}}{d^{(k)T}Ad^{(k)}}$$

avec

$$r^{(k)} = -\nabla q(x^{(k)}) = b - Ax^{(k)}$$

et  $d^{(k)}$  une suite de directions de descente A-conjuguées définies en chaque itération par

$$d^{(k+1)} = r^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}d^{(k)}$$

avec

$$\beta^{(k+1)} = \frac{r^{(k)T}Ad^{(k)}}{d^{(k)T}Ad^{(k)}}$$

**Algorithme de la méthode du gradient conjugué linéaire:**

**Données :**  $A$  matrice symétrique D. P,  $b$  vecteur,  $x_0$  point initial arbitrairement choisi.

**Sortie :** une approximation de la solution du problème :  $Ax = b$

(a)  $k = 0$

$$r_0 = b - Ax_0$$

(b) tant que  $\|x^{(k)}\| > \epsilon$

• Calculer

$$\alpha^{(k+1)} = \frac{r^{(k)}d^{(k)}}{d^{(k)T}Ad^{(k)}}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k+1)}Ad^{(k)}$$

$$\beta^{(k+1)} = \frac{r^{(k)T}Ad^{(k)}}{d^{(k)T}Ad^{(k)}}$$

$$d^{(k+1)} = r^{(k+1)} - \beta^{(k+1)}d^{(k)}$$

• On pose  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)}d^{(k)}$ ;  $k = k + 1$

fin

(c) **Retourner**  $x^{(k)}$

## 2. Méthode du gradient conjugué non-linéaire:

**Definition 18** La méthode du gradient conjugué non-linéaire consiste à construire une famille de directions de descente conjuguée pour résoudre le problème d'optimisation.

**Theorem 6** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . alors

- (a) Le résidu  $r^{(k)}$  est orthogonale aux directions  $d^{(i)}$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$   
 (b) Le résidu  $r^{(k)}$  est orthogonale à la famille  $\{r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(k-1)}\}$   
 (c)

$$r^{(k)T} d^{(k)} = -r^{(k)T} r^{(k)}$$

### Principe de La méthode:

On reprend l'algorithme du gradient conjugué linéaire avec les changements suivants:

- La suite des résidus  $r^{(k)}$  sera définie à l'itération  $k$  par:

$$r^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

- En utilisant le théorème (19) on remarque que le terme général de la suite  $\beta^{(k)}$  s'écrit aussi:

$$\beta^{(k+1)} = \frac{r^{(k+1)T} r^{(k+1)}}{r^{(k)T} r^{(k)}}$$

- Un autre changement a été proposé par **Polak-Ribière**, pour le calcul des termes de la suite  $\beta^{(k)}$

$$\beta^{(k+1)} = \frac{\nabla f(x^{(k+1)})^T (\nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)}))}{\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})}$$

### Algorithme de la méthode du gradient conjugué non-linéaire:

**Données :**  $f$  supposée au moins différentiable,  $x_0$  point initial arbitrairement choisi.

**Sortie :** une approximation de la solution du problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

(a)  $k = 0$

(b) tant que  $\|\nabla f(x^{(k)})\| > \epsilon$

- Calculer

$$\alpha^{(k)} = \min (f(x^{(k)}) + \alpha d^{(k)})$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k+1)} \nabla f(x^{(k)})$$

$$\beta^{(k+1)} = \frac{\nabla f(x^{(k+1)})^T (\nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)}))}{\nabla f(x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)})}$$

$$d^{(k+1)} = -\nabla f(x^{(k+1)}) + \beta^{(k+1)} \nabla f(x^{(k)})$$

- On pose  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$ ;  $k = k + 1$

fin

(c) **Retourner**  $x^{(k)}$

## Méthode de Newton

La méthode repose sur le fait que  $f$  soit de classe  $C^2$ , admet un minimum en un point  $x_*$  et que  $\nabla^2 f = H(x)$  (la matrice hessienne) soit définie positive dans un voisinage  $V$  de  $x_*$ . Alors en utilisant un développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction au voisinage de son minimum  $x_*$ , on obtient:

$$\begin{aligned} f(x_*) &\approx f(x_*) + \nabla f(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x_* - x^{(k)})\nabla^2 f(x^{(k)})(x_* - x^{(k)}) \\ &= q_k(x_*), \forall k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } x^{(k)} \in V(x_*) \end{aligned}$$

$f$  est de classe  $C^2$  donc  $x_*$  est un point critique de  $f$  par conséquent il est un point critique pour la forme quadratique  $q_k$ , d'où

$$\nabla q_k(x_*) = \nabla f(x^{(k)}) + \nabla^2 f(x^{(k)})(x_* - x^{(k)}) = 0$$

ce qui donne

$$x_* = x^{(k)} - (\nabla^2 f(x^{(k)}))^{-1} \nabla f(x^{(k)})$$

**Proposition 7** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et soit  $x \in D_f$  tel que  $\nabla^2 f(x) > 0$ . Alors  $d = -(\nabla^2 f(x^{(k)}))^{-1} \nabla f(x^{(k)})$  est une direction de descente.

D'où la suite des itérés  $(x^{(k)})$  définissant l'algorithme de Newton sera donnée par:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + d^{(k)}$$

avec  $\alpha^{(k)} = 1$  et  $d^{(k)}$  est l'unique solution de l'équation

$$\nabla^2 f(x^{(k)})d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

**Remark 2** • Le pas de la méthode de Newton peut être pris égal à 1 ou peut être choisi par la recherche linéaire.

- Lorsque le hessien  $H(x^{(k)})$  n'est pas défini positif, la direction de déplacement  $d^{(k)}$  dans la méthode de Newton peut ne pas être une direction de descente.

**Algorithme de la méthode de Newton:**

**Données :**  $f$  supposée au moins différentiable,  $x_0$  point initial arbitrairement choisi.

**Sortie :** une approximation de la solution du problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

1.  $k = 0$   
 $\alpha_0 > 0$

2. tant que  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| > \epsilon$

- Calculer  
 $d^{(k)} = -(\nabla^2 f(x^{(k)}))^{-1} \nabla f(x^{(k)})$
- Recherche linéaire: choix du pas  $\alpha_k > 0$
- On pose  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)}d^{(k)}$ ;  $k = k + 1$

fin

3. Retourner  $x^{(k)}$